内 容 簡 介

本书介绍张量的基本概念、张量代数、张量分析及应用，并与力学实例相结合，使具备向量代数基本知识的读者，可以阅读本书的主要内容。全书分六章，包括笛卡尔张量的基本运算，普遍张量的理论和计算，张量的某些应用。

读者对象：高等院校的大学生、研究生、教师和科技工作者。



序

近来，张量分析的理论越来越多的引起了力学工作者和科技工作者的注意。在物理、力学及科技图书中，在教材中，在文献杂志中，越来越多的作者不同程度的应用了张量分析和指标表示法。目前，高等院校的某些专业在高年级大学生和研究生中增加了张量分析课程的内容。

有关张量的书，中文版的很少，又由于张量的抽象和记号的繁杂，给渴望学习这方面知识的读者带来了很大的困难，希望有一本适合他们的书。本书就是为了满足这方面的需要，根据近年来的教学实践编写的。

在编写中努力化抽象为具体，做到概念清楚，通俗易懂，从简到繁，由浅入深，并与力学实例相结合，使具备向量代数基本知识的读者可以阅读本书的主要内容。一些地方还把张量符号用矩阵对照写出；这不是张量本身的需要，而且一般情况也不可能做到，但对开始熟悉张量是有益的。

本书共分六章，书后有一章关于向量代数基本知识的附录，可供未学过这部分内容的读者参考。

第一章讲述笛卡尔张量的基本运算。

第二章到第五章讲述普遍张量的理论和计算，包括张量代数和张量分析。

第六章是张量的某些应用，包括曲线坐标、曲面，以及弹性力学基本方程的变换。

其中，笛卡尔张量可以作为独立的一章，对于那些只需简单了解一下张量基本知识的读者，读了这一章也就够了。它也可以作为阅读后面普遍张量的引子。但是，第二章以后的内容并不以第一章为基础，所以，也可以直接从第二章读起。

本书可供高等院校大学生、研究生、教师和科技工作者参考。

唐立民教授审阅了书稿并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。凡思开同志精心描绘了全书插图，也深表谢意。

由于时间短促，水平所限，缺点、错误和不当之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

1983年7月

目　　录

绪　　论……………………………………………………………………1
第一章　笛卡尔张量……………………………………………………4
　　第一节　指标表示法…………………………………………………4
　　第二节　坐标变换……………………………………………………11
　　第三节　笛卡尔张量…………………………………………………14
　　第四节　张量的运算…………………………………………………21
　　第五节　二阶张量……………………………………………………26
　　第六节　张量的主轴、主值和不变量………………………………28
第二章　普遍张量的基本概念…………………………………………32
　　第一节　普遍张量的记法……………………………………………32
　　第二节　基向量、向量的逆变分量和协变分量……………………37
　　第三节　坐标变换……………………………………………………47
　　第四节　张量的普遍定义……………………………………………62
第三章　几个基本的或常用的张量……………………………………74
　　第一节　度量张量……………………………………………………74
　　第二节　置换张量……………………………………………………87
　　第三节　一阶张量——向量…………………………………………92
　　第四节　二阶张量……………………………………………………99
第四章　张量代数 ……………………………………………………105
　　第一节　张量的基本运算 …………………………………………105
　　第二节　可乘张量。对称张量和反对称张量 ……………………110
　　第三节　二阶张量的特征值和不变量 ……………………………112
　　第四节　仿射变换。物体的刚性转动 ……………………………117
　　第五节　张量分量和物理分量 ……………………………………120
第五章　张量分析 ……………………………………………………124

第一节　克里斯托夫符号及其性质。短程线 ……………124
第二节　协变导数 ………………………………………137
第三节　平行移动 ………………………………………145
第四节　内蕴导数与实质导数 …………………………153
第五节　黎曼—克里斯托夫张量 ………………………155
第六节　张量场。梯度、散度和旋度。积分定理 ……162
第六章　张量的某些应用 …………………………………177
第一节　曲线坐标 ………………………………………177
第二节　弹性力学基本方程的张量方程 ………………181
第三节　曲面 ……………………………………………196
附　录　向量计算的基本知识 ……………………………209
第一节　基本概念 ………………………………………209
第二节　向量代数 ………………………………………212
第三节　向量分析 ………………………………………225

绪　论

在力学、几何和物理中，有许多量只有用张量才能描写清楚，或者说这一类物理量或几何量在数量关系的本质上就是张量，它们是自然的和谐。这就如同我们必须用向量描述力、速度和加速度一样。实际上，张量的应用比我们熟悉的向量和标量广泛得多，后者只是张量最简单的特例。就我们所熟悉的物理量或几何量里，可以举出许多张量的例子，例如，在弹性力学中表征一点应力状态和应变状态的是应力张量和应变张量，表征弹性性质的是弹性张量；在曲面几何中表征曲面几何性质的是曲率张量等等。

张量（Tensor）的研究可以追溯到很早，一开始是由高斯（Gauss）、黎曼（Riemann）和克里斯托夫（Christoffel）在发展绝对微分几何学时提出来的。1892年意大利数学家黎奇（Ricci）发表了一篇系统报告阐述绝对微分方法和紧凑表示方法。1901年黎奇和它的学生，另一位意大利数学家列维一齐维他（Levi-Civita）对张量分析的算法给出了进一步阐述。然而，这门学科变成通常所说的张量分析，那是在1916年爱因斯坦（Einstein）给它以这个名称之后。在这之前，由于张量分析看起来相当繁琐，很少得到应用。1915年爱因斯坦发表了广义相对论，从数学工具上黎奇的张量分析起了基本作用。爱因斯坦从1908年发表狭义相对论到1915年发表广义相对论经历了七年的时间，在谈到这个问题时他写到：“为什么还需要七年才能建立广义相对论呢？主要的原因在于不那么容易从坐标必须有一个直接的尺度意义这一概念中解脱出来。”正是张量分析这一有力工具极好的描述了这一新的思想。这就重新引起了人们对张量研究的兴趣，从而促进了张量分析的进一步发展，此后，张量分析在理

论物理的发展上起了重要作用。

张量这个名词本身表明它来源于弹性力学。但是，在很长一段时间弹性力学里用得很少，多数情况下只不过是有个张量的名词而已。在近一、二十年，情况有所变化：一方面是张量分析这门学科本身经历了明显变化，它朝着两个极端的方向发展，一个方向是为抽象数学服务的，一个方向是为应用学科服务的，后者满足了力学学科发展的需要；另一方面是力学工作者普遍地认识到张量分析在连续介质力学中的用途。近来，在物理、力学的科技书和教科书中，在科技文献中越来越多的作者应用了张量分析和指标表示法。正如美国普林斯顿大学爱林根(A.C.Eringen)教授所指出的，“今日，如果你对张量分析没有一定程度的通晓，你就不能攻读大部分文献”。所以，作为一个敏锐的数学工具，张量分析对于许多部门的科技工作者，特别是力学工作者是不可少的。

张量的应用在某种程度上是为了把方程写得简洁、紧凑。然而，绝不止于此。因为，自然规律在本质上具有广义的协变性，因而物理定律或基本方程式不应依赖于坐标系，或者说应该存在着各种坐标系都成立的描述物理规律的基本方程式，这是物理学的一个基本假设，正是张量分析这一工具提供了实现这一设想的可能性。正如量纲分析在处理模型实验上非常有效一样，张量分析在处理坐标上也是非常有效的。虽然，张量分析的研究是在坐标系中进行的，但是，物理问题的基本方程式写成张量方程的形式后，它就不再依赖于某个特定的坐标系了。同时，利用张量这一有效的工具后对物理问题的认识也更加深刻了。

当然，由于张量比较抽象、形式化以及记号的繁杂，有时又会使人们不去注意问题的物理实质，这是应当注意的。另外，利用张量处理简单问题时，似乎显得麻烦和不便，然而在处理过于复杂或不易直观化的问题，例如非线性问题时，张量分析则显得十分简单有力。

张量的严格定义见第二章第四节。从概念上，如果表示同一

抽象事件的总计量与坐标系无关，这个总计量就是张量。例如，应力张量就是对一点应力状态的总计量。用向量（也称为一阶张量）来说明就更清楚了，一点受到外力作用的总计量就是力向量，显然，力向量是不随坐标系而变的，如果解析地用三个分量表示该力，当坐标系变化时各分量也变化，然而作为总计量的力向量并未变。

作为一门学科，张量分析的内容可以相当的广泛。本书从一开始就限于绝对张量的范围，未涉及相对张量的问题，所以书中“张量”均指“绝对张量”。另外，除了欧几里德空间(Euclid)，本书还涉及到了黎曼空间问题，但未涉及非黎曼空间等更广泛的问题，这些已超出本书的范围，读者可以参看有关著作*)。

*)例如，《张量分析》，A.C.爱林根著，钱伟长译，江苏科学技术出版社出版，1981。

第一章 笛卡尔(Descartes)张量

本章讨论一类特殊的张量，称为笛卡尔张量，简称卡氏张量。

第一节 指标表示法

一、指标标号。自由指标

一个物理量或几何量，如果是由一个实数值（或空间点）的函数所确定的，就称这个物理量或几何量为数量或标量。例如物理学中的功和能，几何学中的长度或距离。标量用一个字母就可以表示，例如 f，φ 等。

实际上，不少的物理量或几何量不能用一个标量函数来描述，而必须用一组标量函数来描述，其中的每一个标量都称为这个总量的分量，分量与坐标系的选择有关。

例如，一个向量必须由三个分量表示，如果已知这三个分量，这个向量也就被确定了。力向量可以用三个分量 P_x，P_y，P_z表示，位移向量可以用 u，v，w 表示等等。至于用什么字母表示这些量都是无关紧要的，只是习惯问题。

再如，弹性力学中一点的应力状态是一个张量，称为应力张量，它是用九个应力分量σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yx}，τ_{yz}，τ_{zy}，τ_{zx}，τ_{xz}表示的。

以后，为了书写简洁，在张量记法中采用带有文字指标标号的字母来表示这些量，在卡氏张量中只采用下标标号的字母表示。例如：

笛卡尔直角坐标系中的坐标采用记号

$$x_1 = x,\quad x_2 = y,\quad x_3 = z$$

并记为

$$x_i,\quad i=1,2,3$$

基向量采用记号

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$$

式中，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$都是单位向量，可记为

$$\boldsymbol{e}_i,\quad i=1,2,3$$

实际上，任何一个向量都可以用三个分量表示，并记为

$$a_i,\quad i=1,2,3$$

今后说到向量a_i就表示

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$$

其中，$a_1=a_x$，$a_2=a_y$，$a_3=a_z$。

类似地，一个二阶张量，例如应力张量可以用带有两个下标字母的量表示，记为

$$\sigma_{ij},\quad i,j=1,2,3$$

它表示九个分量：$\sigma_{11}=\sigma_{xx}=\sigma_x$，$\sigma_{12}=\sigma_{xy}=\tau_{xy}\cdots$。

上面字母中的文字指标，例如i、j称为自由指标。在三维空间中每个自由指标可以取值1，2，3中的任何一个，二维空间中只能取1或2。例如，在σ_{ij}中取$i=2$，$j=1$表示σ_{ij}中的σ_{21}分量。在不给定标号的具体数值时，表示每个指标遍取1，2，3（三维空间）或1，2（二维空间），今后一般不再注明指标的范围，如σ_{ij}就表示σ_{11}，σ_{12}，……等共九个分量。

显然，改变自由指标的字母不会影响它的含义，例如a_i也可以记为a_k，它们都表示a_1，a_2，a_3。但是，在一个方程式中，各项里的相同指标不能单独任意改变，可以同时作相同的改变。例如$a_i=b_i+c_i$也可以写为$a_k=b_k+c_k$等等，它们都表示三个方程：$a_1=b_1+c_1$，$a_2=b_2+c_2$，$a_3=b_3+c_3$。

二、求和约定。哑标

在张量运算中，常常遇到求和。例如，坐标变换

$$\xi_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3$$

$$\xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$\xi_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

通常可用和号记为

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \quad i=1,2,3$$

在张量记法中，为了简便，约定：在一个单项式中，同一个指标重复出现两次，表示将该指标按顺序 1，2，3 轮换求和。根据这一约定，上式可以省略求和记号 $\sum_{j=1}^{3}$，直接记为

$$\xi_i = a_{ij}x_j \qquad (1-1)$$

在单项式中重复出现的指标称为求和指标或“哑标”。哑标字母可以任意改变，如上式也可以记为 $\xi_i = a_{ik}x_k$。因为 i 按 1，2，3 取值，所以式（1—1）共表示三个等式。

再如，根据求和约定，有

$$a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$
$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$$

等等。

三、克罗内克尔（Kroneker）δ记号

δ_{ij}记号表示九个分量，定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & 当\ i = j \\ 0, & 当\ i \neq j \end{cases} \qquad (1-2)$$

δ_{ij}的性质和作用，示例如下：

1. $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \qquad (1-3)$
2. $\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij} \qquad (1-4)$
3. $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3 \qquad (1-5)$
4. $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl} = \delta_{il} \qquad (1-6)$
5. $a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij} \qquad (1-7)$

6. $a_{ij}\delta_{ij}=a_{ii}$ （1—8）

7. $a_i\delta_{ij}=a_j$ （1—9）

用直接展开法极易证明上述各式。利用这些性质表示公式是方便的，从下面的例子可以看出。

8. 若$\sigma_{11}=\sigma$，$\sigma_{22}=\sigma$，$\sigma_{33}=\sigma$，而其余分量为零，其中σ为常数。这时，九个分量可以用一个公式统一表示为

$$\sigma_{ij}=\sigma\delta_{ij} \qquad (1—10)$$

9. 若$S_{11}=\sigma_{11}-\sigma$，$S_{22}=\sigma_{22}-\sigma$，$S_{33}=\sigma_{33}-\sigma$，$S_{12}=\sigma_{12}$，$S_{21}=\sigma_{21}$，$S_{23}=\sigma_{23}$，$S_{32}=\sigma_{32}$，$S_{31}=\sigma_{31}$，$S_{13}=\sigma_{13}$共九个方程，可以通过$\delta_{ij}$用一个方程表示为

$$S_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij} \qquad (1—11)$$

10. $a_{ij}x_j-\lambda x_i=a_{ij}x_j-\lambda\delta_{ij}x_j$

$$=(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})x_j \qquad (1—12)$$

另外，笛卡尔直角坐标系中的单位基向量间的关系可表为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij} \qquad (1—13)$$

四、列维—齐维塔（Levi-Civita）符号

亦称黎奇（Ricci）符号或置换符号，用记号e_{ijk}表示，共27个分量，定义为

$$e_{ijk}=\begin{cases}1，若(i,j,k)为循环序列；\\-1，若(i,j,k)为逆循环序列；\\0，若(i,j,k)为非循环序列。\end{cases} \qquad (1—14)$$

说明：

1. 循环序列：i，j，k不取相同值且按 1→2→3 顺序排列。亦即

$$e_{123}=e_{231}=e_{312}=1 \qquad (1—15)$$

2. 逆循环序列：i，j，k不取相同值且按 1→3→2 顺序排

列。亦即

$$e_{321}=e_{213}=e_{132}=-1 \quad (1-16)$$

3．非循环序列：i，j，k中有两个以上的指标取相同值者。例如

$$e_{112}=e_{222}=e_{323}=\cdots=0 \quad (1-17)$$

4．奇置换和偶置换：在i，j，k的具体序列中将指标顺序做奇数次调换为奇置换，做偶数次调换为偶置换。例如，e_{213}是e_{123}的奇置换，e_{312}是e_{123}的偶置换等等。从式（1—15），（1—16）看出，序列的偶置换仍属于原序列的集合，循环序列的奇置换变为逆循环序列，逆循环序列的奇置换变为循环序列，非循环序列的任何置换都是非循环序列。

利用置换符号可以简化公式，示例如下：

1．表示行列式。

设矩阵$[a_{ij}]$的行列式为a，即

$$a=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (a)$$

展开得

$$a=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

利用式（1—14），上式可写为

$$a=e_{123}a_{11}a_{22}a_{33}+e_{312}a_{13}a_{21}a_{32}+e_{231}a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+e_{321}a_{13}a_{22}a_{31}+e_{132}a_{11}a_{23}a_{32}+e_{213}a_{12}a_{21}a_{33}$$

即

$$a=e_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \quad (1-18)$$

交换行列式（a）中的任意两行，行列式的值变号，例如

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-a \quad (b)$$

可记为

$$e_{213}a = e_{ijk}a_{2i}a_{1j}a_{3k}$$

对行列式（a）的行进行奇数次交换，行列式的值为 $-a$，偶数次交换为 a，一般地可以表示为

$$e_{lmn}a = e_{ijk}a_{li}a_{mj}a_{nk} \tag{1—19}$$

类似地，交换行列式的列可以一般地表示为

$$e_{ijk}a = e_{lmn}a_{li}a_{mj}a_{nk} \tag{1—20}$$

2. 表示向量叉积（有向积）的展开式。

设向量

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

其中每个向量都可用基向量表示为

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{b} = b_j\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{c} = c_k\boldsymbol{e}_k \tag{c}$$

根据向量的叉积乘法公式，有

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{d}$$

展开得

$$\boldsymbol{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3$$

将该式与（c）之第三式对比，并利用式（1—14）有

$$c_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = e_{123}a_2b_3 + e_{132}a_3b_2 = e_{1jk}a_jb_k$$

$$c_2 = a_3b_1 - a_1b_3 = e_{231}a_3b_1 + e_{213}a_1b_3 = e_{2jk}a_jb_k$$

$$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1 = e_{312}a_1b_2 + e_{321}a_2b_1 = e_{3jk}a_jb_k$$

综合以上三式可简写为

$$c_i = e_{ijk}a_jb_k \tag{1—21}$$

五、求导数的简记法

将微分算符简记为

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x_i} = (\ )_{,i} \tag{1—22}$$

例如

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=u_{i,j} \qquad (1-22')$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}=u_{i,jk}$$

等等。

以上种种是张量运算中常采用的符号或记号，其它符号或记法，待遇见时再给以说明。必须注意的是，并非采用指标记法的量都是张量。

根据上述规定的记法可以使许多冗长的公式写得非常简洁，下面举例说明。

1． 矩阵乘法。

若

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

则可记为

$$c_{ij}=a_{ik}b_{kj} \qquad (1-23)$$

2． 向量模。

设$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$，则

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\sqrt{x_i x_i} \qquad (1-24)$$

3． 二重求和。

矩阵

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \sigma_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

记为

$$B_{lm}=A_{ij}\alpha_{li}\alpha_{mj} \qquad (1-25)$$，

4. 克罗内克尔 δ 与置换符号间存在如下几个有用的关系式：

$$e_{ijp}e_{lmp}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$
$$e_{ijl}e_{ijm}=2\delta_{lm} \qquad (1-26)$$
$$e_{ijk}e_{ijk}=6$$

考虑指标 i，j，l，m，p 在取值范围内的所有可能组合便可直接证明上式，也可由式

$$\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}=e_{ijk}e_{lmn} \qquad (1-27)$$

直接证明。

5. 数量场 ϕ 的梯度。

$$\text{grad}\ \phi=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3=\phi_{,i}\boldsymbol{e}_i \qquad (1-28)$$

6. 向量场 $\boldsymbol{v}$ 的散度。

$$\text{div}\ \boldsymbol{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=v_{i,i} \qquad (1-29)$$

7. 向量场 $\boldsymbol{v}$ 的旋度。

$$\text{rot}\ \boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e}_2+$$
$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_3=v_{j,i}e_{ijk}\boldsymbol{e}_k \qquad (1-30)$$

第二节 坐 标 变 换

已知图 1 — 1 表示的两个坐标系：

旧坐标系 $0x_1x_2x_3$，基向量为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$；

新坐标系 $0x_1'x_2'x_3'$，基向量为 $\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$，$\boldsymbol{e}_3'$。

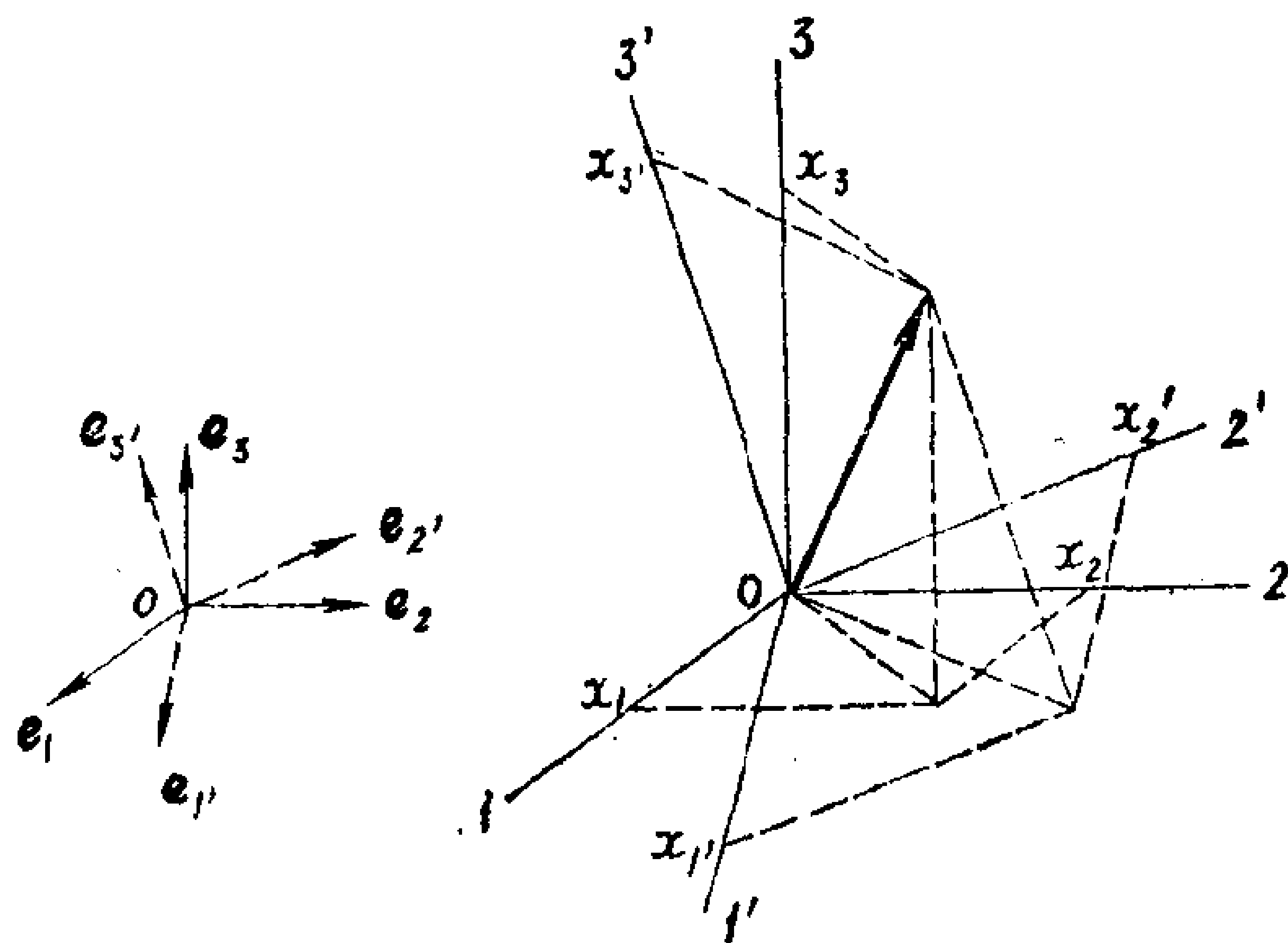


图 1—1

新、旧坐标（或基向量）之间夹角方向余弦表为

	x_1 (e_1)	x_2 (e_2)	x_3 (e_3)
$x_{1'}$ ($e_{1'}$)	$\alpha_{1'1}$	$\alpha_{1'2}$	$\alpha_{1'3}$
$x_{2'}$ ($e_{2'}$)	$\alpha_{2'1}$	$\alpha_{2'2}$	$\alpha_{2'2}$
$x_{3'}$ ($e_{3'}$)	$\alpha_{3'1}$	$\alpha_{3'2}$	$\alpha_{3'3}$

（1—31）

由解析几何知道，新、旧坐标间的关系为

$$\begin{pmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3} \\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1—32}$$

及

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{2'1} & \alpha_{3'1} \\ \alpha_{1'2} & \alpha_{2'2} & \alpha_{3'2} \\ \alpha_{1'3} & \alpha_{2'3} & \alpha_{3'3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix} \tag{1—33}$$

或写为张量形式

$$x_{i'} = \alpha_{i'j} x_j \tag{1—32′}$$

及

$$x_j = \alpha_{k'j} x_{k'} \tag{1—33′}$$

新、旧基向量间的变换关系为

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \alpha_{i'j} \boldsymbol{e}_j \tag{1—34}$$

及

$$\boldsymbol{e}_j = \alpha_{k'j} \boldsymbol{e}_{k'} \tag{1—35}$$

对比式（1—32），（1—33）看出

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3} \\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{2'1} & \alpha_{3'1} \\ \alpha_{1'2} & \alpha_{2'2} & \alpha_{3'2} \\ \alpha_{1'3} & \alpha_{2'3} & \alpha_{3'3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1—36}$$

或写为

$$\alpha_{i'j}\alpha_{k'j} = \delta_{i'k'} \tag{1—36'}$$

类似地有 $$\alpha_{i'j}\alpha_{i'k} = \delta_{jk}$$

该式也可以由式（1—34）证明，由于新、旧坐标系中的基向量都是单位向量且彼此正交，所以有

$\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_{k'} = \alpha_{i'j}\alpha_{k'l}\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_l = \alpha_{i'j}\alpha_{k'l}\delta_{jl} = \alpha_{i'j}\alpha_{k'j}$ 因为上式左端等于$\delta_{i'k'}$，故式（1—36′）之第一式得证。

在式（1—32）～（1—35）中，系数$\alpha_{i'j}$确定了坐标和基向量的旋转变换，称为变换系数。在这里变换系数就是方向余弦。很明显，若新、旧坐标系都是右手坐标系，由式（1—36）可知，变换系数矩阵的行列式等于1，即

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3} \\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3} \end{vmatrix} = 1 \tag{1—37}$$

该式也可以根据单位基向量混积等于单位体积，即 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 = V = 1$ 得到证明。

由式（1—36）看出，变换系数矩阵

$$[\alpha_{i'j}]^T = [\alpha_{i'j}]^{-1} \tag{1—38}$$

即为正交矩阵。

现在考察任意向量$\boldsymbol{a}$的分量a_i，在坐标系进行旋转变换时，它所服从的变换规律。由解析几何或向量代数可知，假如在新坐标系向量的分量为a'_i，则

$$a_{i'} = \alpha_{i'j}a_j \tag{1—39}$$

实际上，这个关系式也可以根据向量$\boldsymbol{a}$不随坐标系而变的性质得到。向量$\boldsymbol{a}$在新、旧坐标系中表为

$$\boldsymbol{a}=a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}=a_j\boldsymbol{e}_j$$

将式（1—35）代入上式的最右端，则有

$$a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}=a_j\alpha_{k'j}\boldsymbol{e}_{k'}$$

将等式两边点乘以$\boldsymbol{e}_{j'}$，并利用式（1—13）和（1—9），上式的左边和右边分别等于

$$a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_{j'}=a_{i'}\delta_{i'j'}=a_{j'}$$

及
$$a_j\alpha_{k'j}\boldsymbol{e}_{k'}\cdot\boldsymbol{e}_{j'}=a_j\alpha_{k'j}\delta_{k'j'}=a_j\alpha_{j'j}$$

因此有

$$a_{j'}=\alpha_{j'j}a_j$$

将下标j'改为i'即得到式（1—39）。

如果将式（1—39）两边同乘$\alpha_{i'k}$，则得

$$a_{i'}\alpha_{i'k}=\alpha_{i'j}\alpha_{i'k}a_j=\delta_{jk}a_j=a_k$$

改换指标后可写为

$$a_j=\alpha_{k'j}a_{k'} \qquad (1—40)$$

将式（1—39）、（1—40）与式（1—32）～（1—35）对比看出，在坐标系进行旋转变换时，向量的分量与基向量服从相同的变换规律，也与坐标服从相同的变换规律。

第三节　笛卡尔张量

熟知，向量是具有大小和方向的物理量或几何量，它与选择什么样的坐标系无关。但是，在处理具体的力学问题时，又往往需要引进一个坐标系。在三维的笛卡尔直角坐标系中研究向量，它与三个实数的集合一一对应，每个实数称为向量的分量，且等于向量在该坐标轴上的投影。向量的分量与坐标系的选择有关。根据上一节的分析，当着坐标系进行旋转变换时，向量的分量服从固定的变换规律。因此，我们完全可以用分量从坐标变换的角度给向量一个全新的解析定义。

在三维空间中，当直角坐标系从$Ox_1x_2x_3$旋转变换到$Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$时，基向量和坐标由变换系数按式（1—34）和（1—

32′）变换。这时，如果在坐标系$Ox_1x_2x_3$中确定的三个分量a_1，a_2，a_3与在坐标系$Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$中确定的三个分量$a_{1'}$，$a_{2'}$，$a_{3'}$之间服从相同的变换规律，即按式（1—39）建立对应关系，则定义由这三个分量所确定的物理量或几何量为向量。

根据上面的定义，由分量a_1，a_2，a_3和分量$a_{1'}$，$a_{2'}$，$a_{3'}$所确定的是完全相同的向量，每组分量都给出了该向量的大小和方向。所以，这个解析定义与原来的向量定义是等价的。这可由（1—34），（1—39），（1—36′）证明如下：

$$\boldsymbol{a}=a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}=\alpha_{i'j}\alpha_{i'k}a_j\boldsymbol{e}_k=\delta_{jk}a_j\boldsymbol{e}_k=a_k\boldsymbol{e}_k$$

把向量的这个解析定义加以推广就可以得到张量的定义。

首先定义二阶张量。

在三维空间中，当直角坐标系从$Ox_1x_2x_3$旋转变换到$Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$时，基向量和坐标由变换系数按式（1—34）和（1—32′）变换。这时，在旧坐标系中，由九个标量函数T_{ij}所确定的量，与新坐标系中的九个标量函数$T_{i'j'}$按式

$$T_{i'j'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ij} \qquad (1—41)$$

变换，则这九个量的集合称为二阶张量。其中的每个元素称为二阶张量的分量。

二阶张量的例子是很多的，例如弹性力学中的应力张量、应变张量，刚体力学中的惯性张量等等，它们的张量性质是明显的，因为从弹性力学*）及刚体力学知道，它们的转换关系完全与式（1—41）一致。

下面我们证明δ_{ij}的张量性质。根据定义有

$$\delta_{ij}\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}=\alpha_{i'j}\alpha_{j'j}=\delta_{i'j'}$$

这就证明了克罗内克尔δ_{ij}符号是一个二阶张量。因为只有$i=j$的元素为1，其余均为零，所以称为单位张量。由于它的分量在坐标变换时不变，所以称为不变张量。

二阶张量的分量，可以根据指标标号排列成3×3阶的方

* 此处及以后涉及弹性力学的内容可参见《弹性力学及其有限元法》（张允真、曹富新编著，中国铁道出版社出版，1983）。

阵，称为二阶张量矩阵。如张量a_{ij}的矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (a)$$

张量δ_{ij}的矩阵是单位矩阵。

在已经给出的二阶张量定义的基础上，还可以给出二阶张量的第二个定义：设a_i、b_j为两个任意向量的分量，若九个分量T_{ij}能与它们构成标量

$$\varphi = T_{ij}a_i b_j \qquad (1-42)$$

则这九个分量T_{ij}定义一个二阶张量。

上面对二阶张量的两个定义是完全一致的，证明如下：

在新坐标系中，根据φ的不变性，并利用公式（1—40），有

$$\varphi = T_{i'j'}a_{i'}b_{j'} = T_{ij}a_i b_j = T_{ij}\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}a_{i'}b_{j'}$$

由于向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的任意性，必有下式成立：

$$T_{i'j'} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ij}$$

该式就是张量第一定义的公式（1—41）。

式（1—41）的反变换为

$$T_{ij} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{i'j'} \qquad (1-43)$$

该式由张量的第二定义是极易证明的。

仿照二阶张量的定义，我们来定义高阶张量。

在三维空间中，当直角坐标系从$Ox_1x_2x_3$旋转变换到$Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$时，基向量和坐标由变换系数按式（1—34）和（1—32′）变换。这时，如果在坐标系$Ox_1x_2x_3$中确定的$N=3^r$（r—指标个数）个分量（标量函数）$\underbrace{T_{ij\cdots n}}_{r个}$与在坐标系$Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$中确定的$\underbrace{T_{i'j'\cdots n'}}_{r个}$之间服从相同的变换规律，即按式

$$T_{i'j'\cdots n'} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\cdots\alpha_{n'n}T_{ij\cdots n} \qquad (1-44)$$

建立对应关系，则这N个分量的集合称为r阶张量。

因为$|\alpha_{p'q}|\neq 0$，以及式（1—36′）的关系，式（1—44）存在反变换

$$T_{ij\cdots n}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\cdots\alpha_{n'n}T_{i'j'\cdots n'} \qquad (1-45)$$

显然，满足这一关系的量$T_{ij\cdots n}$亦是张量。

同样也可以给出高阶张量的第二个定义：设a_i，b_j，$\cdots c_n$为r个向量的分量，若r^3个标量函数$\underbrace{T_{ij\cdots n}}_{r\text{个}}$可与之构成标量

$$\varphi=T_{ij\cdots n}a_ib_j\cdots c_n \qquad (1-46)$$

则$T_{ij\cdots n}$定义一个r阶张量。

由于上面定义张量的基础是在笛卡尔直角坐标系之间变换，故称为笛卡尔张量。更普遍的张量本书将从第二章讲起。

张量的阶数就是其指标的个数。根据张量的定义，向量称为一阶张量，标量称为零阶张量。

张量的表示方法，除了上面已经采用的分量记法外，还常采用张量的不变性记法，或称并矢（并向量）记法，这里我们也作一介绍。

众所周知，向量有两种表示方法：一是用分量表示，如a_i表示一个向量；另一是用基向量的线性组合表示，如$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$。后者$\boldsymbol{a}$（就是常用的Gibbs型向量）不随坐标系而变化，是向量的不变形式，它更能反应问题的物理本质。

类似于向量（即一阶张量）的不变性记法，也可以把二阶张量表示为不变形式。

为此，我们首先定义并矢。

向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的并矢记为$\boldsymbol{ab}$，定义为a_ib_j，它有九个分量，用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{Bmatrix}$$

并矢的运算性质如下：

$$(\alpha \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(\alpha \boldsymbol{b})=\alpha \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{c} \qquad (1-47)$$
$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}$$

式中，α是标量。

若将向量用分量与基向量的线性组合来表示，并矢$\boldsymbol{ab}$可以写成为

$$\boldsymbol{ab}=(a_i\boldsymbol{e}_i)(b_j\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (1-48)$$

基向量$\boldsymbol{e}_i$的并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$称为单位并矢。这样，就类似于向量，把并矢用其分量和单位并矢的线性组合表示出来。

对于并矢应当注意以下两点：

1. 并矢与点积是两个不同的概念，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的并矢是a_ib_j，有九个分量，而点积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i$，其值不依赖于分量所在的参照坐标系，是不变量。以后，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$中间不加任何符号表示并矢，加·号表示点积，加×表示叉积。

2. 通常$\boldsymbol{ab}\neq\boldsymbol{ba}$，因为它们的分量不对应相等。

上述两个向量并矢的概念可以很容易地推广到三个或多个向量上去，一般地有

$$\underbrace{\boldsymbol{ab}\cdots\boldsymbol{c}}_{r\text{个}}=\underbrace{a_ib_j\cdots c_n}_{r\text{个}}\underbrace{\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_n}_{r\text{个}} \qquad (1-49)$$

单位基向量$\boldsymbol{e}_i$的并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_n$为$r$阶单位并矢。

对式（1—48），下面我们证明：

1. 并矢$\boldsymbol{ab}$是二阶张量。因为它的分量a_ib_j符合二阶张量的变换规律，即在新坐标系中有下式成立：

$$\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}a_ib_j=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'i}\alpha_{l'j}a_{k'}b_{l'}=\delta_{i'k'}\delta_{j'l'}a_{k'}b_{l'}$$
$$=a_{i'}b_{j'} \qquad (b)$$

2. 并矢$\boldsymbol{ab}$不依赖其分量所在的参照坐标系，因为有

$$a_{i'}b_{j'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}=(\alpha_{i'i}a_i)(\alpha_{j'j}b_j)(\alpha_{i'k}\boldsymbol{e}_k)(\alpha_{j'l}\boldsymbol{e}_l)$$
$$=\delta_{ik}\delta_{jl}a_ib_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (c)$$

下面回过头来研究前面提到的用不变性记法表示张量的问题。像把向量记为$\boldsymbol{a}$一样，把张量记为$\boldsymbol{T}$，如果是二阶张量，其分量为T_{ij}，如果是高阶张量，其分量为$T_{ij\cdots n}$，它们满足张量的变换式（1—41），（1—44）。如记

$$\boldsymbol{T}=T_{ij\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_n \tag{1—50}$$

则$\boldsymbol{T}$将不依赖于参照坐标系的选择。证明方法与二阶并矢情形相同，不再重复。

式（1—50）称为张量的不变性记法。我们也可以把它作为张量的第三个定义，即凡是可以在任何笛卡尔直角坐标系写为式（1—50）不变形式的量$T_{ij\cdots n}$称为笛卡尔张量。今后，将常用式（1—44），（1—46），（1—50）来判别一组数量的张量性质。

此外，为了应用上的方便，再介绍一个判别张量的方法，通常称为商法则。对于二阶张量，商法则可以叙述为：若九个分量a_{ij}与任何一向量b_j按一对指标j求和后能构成另一向量c_i，即

$$c_i=a_{ij}b_j \tag{1—51}$$

则a_{ij}必为一个二阶张量。证明如下：

当着坐标系从$Ox_1x_2x_3$旋转变换为$Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$时，在新坐标系中有

$$c_{i'}=a_{i'j'}b_{j'} \tag{d}$$

因为c_i和b_j是向量，故

$$c_i=\alpha_{k'i}c_{k'},\quad b_j=\alpha_{j'j}b_{j'}$$

于是式（1—51）可以写为

$$\alpha_{k'i}c_{k'}=a_{ij}\alpha_{j'j}b_{j'} \tag{e}$$

在等式两边同乘以$\alpha_{i'i}$，等式左边等于

$$\alpha_{i'i}\alpha_{k'i}c_{k'}=\delta_{i'k'}c_{k'}=c_{i'} \tag{f}$$

代入式（e），得

$$c_{i'}=a_{ij}\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}b_{j'} \tag{g}$$

对比式（g）与（d），有

$$a_{i'j'}b_{j'}=a_{ij}\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}b_{j'} \tag{h}$$

应当注意，这时不应简单的消去两边因子$b_{j'}$，但是，由于上式对于任何向量都成立；可以选择一系列特殊情况，如$b_{2'}=b_{3'}=0$，只有$b_{1'}$，此时可以消去等式两边的$b_{1'}$。于是，对于每个j'都有

$$a_{i'j'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}a_{ij}$$

这就证明了a_{ij}是一个二阶张量。

类似地证明可以把商法则应用于高阶张量，例如，若 c_{ij} 为二阶张量，b_k为一阶张量，且有

$$c_{ij}=a_{ijk}b_k \qquad (1—52)$$

成立，则a_{ijk}是一个三阶张量。

直接利用商法则来判别物理量的张量性质有时显得更为方便。

作为例子，我们证明在笛卡尔直角坐标系中置换符号e_{ijk}是一个三阶张量。

由定义，在新坐标系中张量分量应为

$$\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}e_{ijk}$$

注意到式（1—37）和（1—19）有

$$\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}e_{ijk}=e_{i'j'k'}$$

$$=\begin{cases}1，(i',j',k')\text{循环序列；}\\-1,(i',j',k')\text{逆循环序列；}\\0,(i',j',k')\text{非循环序列。}\end{cases}$$

亦即在坐标变换中，e_{ijk}的各分量保持不变，称为三阶不变张量。如果根据商法则，e_{ijk}的张量性质很容易由式（1—21）看出。

必须注意，e_{ijk}的张量性质只限于笛卡尔张量的范围内。

回顾本节的叙述，我们是以坐标变换为基础，用三种方式定义了张量，它们完全是等价的。在表示方法上采用了具有指标标号的分量表示法和不变性表示法（粗体字）。这两种表示法都被广泛的应用着。

关于张量我们还必须指出下面的事实：

1. 如果一个张量的所有分量在某个坐标系中均为零，则在任何其它的坐标系中也必然为零。这是张量非常重要的一个性质。例如，我们已知在某个坐标系应力张量的九个分量为零，也就是说该点处于无应力状态，当然在任何其它坐标系所有分量也必然为零。证明也是极为简单的，设在某旧坐标系$T_{ij}=0$，在新坐标系则$T_{i'j'}=a_{i'i}a_{j'j}T_{ij}=0$。

2. 设$a_{ij\cdots n}(x_1, x_2, x_3)$，$b_{ij\cdots n}(x_1, x_2, x_3)$为三维空间中的$r$阶张量，如能建立方程

$$a_{ij\cdots n}(x_1, x_2, x_3)=b_{ij\cdots n}(x_1, x_2, x_3)$$

则为张量方程。在张量方程中的每一项都有相同的张量特性，因此在所有能够容许变换到的坐标系普遍有效。

若在上面等式两边同时乘以变换系数$a_{i'i}a_{j'j}\cdots a_{n'n}$，则得到新坐标中的方程

$$a_{i'j'\cdots n'}(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'})=b_{i'j'\cdots n'}(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'})$$ 所以方程具有张量性质。

将原方程移项得

$$a_{ij\cdots n}-b_{ij\cdots n}=0$$

亦即在任何坐标系中张量$a_{ij\cdots n}-b_{ij\cdots n}$的每个分量都为零。

张量分析的重要性也就在于，由物理关系得到的方程如果是张量方程，那它就在所有容许变换的坐标系成立，这就避免了在各种不同坐标系中重新推导方程的麻烦。这就能使我们做到，虽然在处理具体问题时是在特定坐标系进行的，而得到的物理方程又不依赖于坐标系。

第四节 张量的运算

张量可以看作是一特种数类，在研究它们的数量关系时，通常定义下面几种运算。

1. 加 法。

凡是同阶的两个或几个张量可以相加，并得到同阶的张量，

它的分量等于原来张量中标号相同的诸分量之代数和。

例如，张量a_{ij}与b_{ij}之和为c_{ij}，则记

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \tag{1-53}$$

c_{ij}的张量性质是十分明显的。依张量定义有

$$a_{i'j'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}a_{ij}$$

$$b_{i'j'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}b_{ij}$$

因而

$$c_{i'j'}=a_{i'j'}+b_{i'j'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}(a_{ij}+b_{ij})$$

由式（1—53）有

$$c_{i'j'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}c_{ij}$$

这就证明了c_{ij}是与a_{ij}，b_{ij}同阶的张量。

当着坐标系变换时，一个等于诸张量和的张量，在新坐标系，它的分量仍等于原张量在新坐标系中相应的分量之和。

张量加法满足代数运算的交换律和结合律。例如

$$a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}=(c_{ij}+a_{ij})+b_{ij} \tag{1-54}$$

2. 张量乘法。

对于任何阶的诸张量都可施行乘法运算。

两个任意阶张量的乘法定义为：第一个张量中的每一个分量乘以第二个张量中的每一个分量，它们所组成的集合仍然是一个张量，称为第一个张量乘以第二个张量的乘积。积张量的阶数等于因子张量阶数之和。

类似地可以定义多个张量的乘法。

例如，根据乘法定义，一个向量a_i乘以一个二阶张量b_{jk}，乘积记为c_{ijk}，则

$$c_{ijk}=a_ib_{jk}$$

在三维空间中，a_i有三个分量，b_{jk}有九个分量，因而c_{ijk}有27个分量，是一个三阶张量，证明如下：在新坐标系有

$$a_{i'}=\alpha_{i'i}a_i$$

$$b_{j'k'}=\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}b_{jk}$$

于是

$$c_{i'j'k'}=a_{i'}b_{j'k'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}a_ib_{jk}$$
$$=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}c_{ijk}$$

根据张量的定义，上式证明了c_{ijk}是一个三阶张量。

再如，一个标量乘以张量即把标量乘张量的每个元素，积张量的阶数等于原张量的阶数。

须指出，张量乘法不服从交换律。如上例中$c_{ijk}=a_ib_{jk}$，$c_{jki}=b_{jk}a_i$，一般说来$c_{ijk}\neq c_{jki}$，因为二者指标次序不同。

但张量乘法服从分配律和结合律。如$(a_{ij}+b_{ij})c_k=a_{ij}c_k+b_{ij}c_k$，$a_{ij}b_kc_m=a_{ij}(b_kc_m)$。

向量a_i与b_j的积a_ib_j，它的不变性表示即并矢$\boldsymbol{ab}$。高阶张量的乘积也可以表示为不变形式，张量$\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{S}$的乘积表示为$\boldsymbol{TS}$，$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{S}$可以是任意阶张量。

张量相乘提高了阶数，故又称为张量的外积。

3. 张量的缩并。

对r阶张量$T_{ijk\cdots n}$进行缩并，就是对张量的某两个指标求和，例如使$j=k$，所得到的仍是张量，阶数比缩并前的原张量少2，即变为$r-2$阶张量。

缩并使张量降阶，故又称为张量的内积。

设三阶张量T_{ijk}，对后二指标缩并，即使$j=k$，缩并后的张量为T_{ijj}。由张量的第一个定义可以证明它是个一阶张量。在新坐标系

$$T_{i'j'k'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'j}T_{ijj}=\alpha_{i'i}\delta_{j'k'}T_{ijj}$$

由$\delta_{j'k'}$定义，有

$$T_{i'j'j'}=\alpha_{i'i}T_{ijj} \qquad (1-55)$$

对于高阶张量的缩并也可类似地证明。

缩并是张量代数的基本运算之一。它也可由乘法定义。例如对张量$T_{ijk\cdots n}$的j，k这对指标缩并，也可由δ_{jk}乘张量$T_{ijk\cdots n}$得到，即

$$T_{ijj\cdots n}=\delta_{jk}T_{ijk\cdots n} \qquad (1-56)$$

对于单项式，也可以对不同因子的一对指标求和，例如a_ib_j，

使$i=j$得$a_i b_i$，这种缩并也称为a_i与b_j的连并。

二阶张量缩并后得到标量，是它的不变量。例如，应力张量σ_{ij}缩并得到$\sigma_{ii}=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$是应力张量的第一不变量。

向量和标量不能进行缩并运算。

4. 张量函数的导数和微分。

假设张量$T(t)$是某个标量参数t的确定函数，即每个分量都是参数 t 的函数，这时导数$\frac{dT(t)}{dt}$表示每一个分量对 t 求导数，得到的结果是同阶张量，求导数的法则与普通导数相同。

现在讨论张量是坐标函数的情形，这时张量的每个分量都是坐标参数x_1，x_2，x_3的函数。张量导数就是把每个分量对坐标参数求导数。下面我们证明，在笛卡尔直角坐标系中，张量的导数仍然是张量，其阶数比原张量高一阶。

设$T_{ijk\cdots n}(x_1, x_2, x_3)$ 是r阶张量函数，在转轴后的新坐标系$Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$中为$T_{i'j'k'\cdots n'}(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'})$，其导数为$\frac{\partial T_{i'j'k'\cdots n'}}{\partial x_{s'}}$，按普通的链式求导规则有

$$\frac{\partial T_{i'j'k'\cdots n'}}{\partial x_{s'}}=\frac{\partial T_{i'j'k'\cdots n'}}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial x_s}{\partial x_{s'}} \qquad (a)$$

由式（1—33′），有

$$\frac{\partial x_s}{\partial x_{s'}}=\alpha_{s's} \qquad (b)$$

注意到变换系数与坐标参数无关及式（1—44），则式（a）变为

$$\frac{\partial T_{i'j'k'\cdots n'}}{\partial x_{s'}}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}\cdots\alpha_{n'n}\alpha_{s's}\frac{\partial T_{ijk\cdots n}}{\partial x_s} \qquad (c)$$

该式说明$\frac{\partial T_{ijk\cdots n}}{\partial x_s}$是 $r+1$ 阶张量。

现在讨论几个特殊情况：

（1）如果$\phi(x_1, x_2, x_3)$ 是标量，则$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$是向量，它就

是通常所说的标量场ϕ的梯度，如式（1—28）。梯度的向量形式，也就是它的不变性记法为

$$\text{grad }\phi=\phi_{,i}\boldsymbol{e}_i \tag{1—57}$$

梯度的分量记法为

$$[\text{grad }\phi]_i=\phi_{,i} \tag{1—58}$$

如果引用纳伯拉（Nabla）算子（亦称梯度算子）

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \tag{1—59}$$

则有

$$\nabla\phi=\text{grad }\phi \tag{1—60}$$

（2）一阶张量——向量v_i的导数$\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$是二阶张量，若对它的两个指标进行缩并则得到$v_{i,i}$，它就是向量$\boldsymbol{v}$的散度，记为

$$\text{div }\boldsymbol{v}=v_{i,i} \tag{1—61}$$

采用算子∇，也可以将散度写为不变形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\text{div }\boldsymbol{v} \tag{1—62}$$

（3）向量导数$\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$乘以$e_{ijk}$得$v_{j,i}e_{ijk}$，表示向量$\boldsymbol{v}$的旋度，记为

$$(\text{rot }\boldsymbol{v})_k=v_{j,i}e_{ijk} \tag{1—63}$$

或

$$\text{rot }\boldsymbol{v}=v_{j,i}e_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1—63$'$}$$

利用∇算子，还可以将其表为不变形式

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\text{rot }\boldsymbol{v} \tag{1—64}$$

（4）二阶张量T_{ij}的导数$T_{ij,k}$对i、k指标缩并得到$T_{ij,i}$，称为二阶张量的散度，若记

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1—65}$$

则张量的散度记为

$$(\text{div }\boldsymbol{T})_j=T_{ij,i} \tag{1—66}$$

或

$$\text{div }\boldsymbol{T}=T_{ij,i}\boldsymbol{e}_j \tag{1—67}$$

以上我们看到，求张量分量的导数与普通微分学的方法相同，称为张量的普通导数。但是，必须指出，张量的普通导数仍是张量这一结论只当笛卡尔张量是正确的。普遍的张量理论指

出，非笛卡尔直角坐标系张量的普通导数不是张量，张量的协变导数才是张量，而在笛卡尔直角坐标系二者是相同的，详见第五章。

5． 张量的积分定理。

在向量分析中我们曾得到一个非常有用的公式，称为散度定理，表示为

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v} dV = \oint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{1—68}$$

用分量形式写为

$$\int_V v_{i,i} dV = \oint_S v_i ds_i \tag{1—69}$$

这一关系还可以推广到高阶张量的情形，即对于给定的 r 阶张量 $T_{ijk\cdots n}(x_1, x_2, x_3)$ 有

$$\int_V T_{ijk\cdots n,i} dV = \oint_S T_{ijk\cdots n} ds_i \tag{1—70}$$

上面各式中dV是体积微元，ds_i（$i=1,2,3$）为面积微元向量的分量。

第五节　二阶张量

本节我们讨论力学中较为常见的二阶张量。

1． 对称张量

若张量T_{ij}满足关系式

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{1—71}$$

则称T_{ij}为二阶对称张量。

在三维空间中，二阶对称张量独立分量的数目是 6，在二维空间中是 3 。

对称张量的对称性质相对于坐标的旋转变换是不变的，即若张量在某个坐标系中是对称的，则它在任何坐标系中都是对称的。证明如下：

在新坐标系中有

$$T_{i'j'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ij}$$
$$T_{j'i'}=\alpha_{j'j}\alpha_{i'i}T_{ji}$$

根据式（1—71）的定义，显然有

$$T_{i'j'}=T_{j'i'}$$

2. 反对称张量

若张量T_{ij}满足关系式

$$T_{ij}=-T_{ji} \tag{1—72}$$

则称T_{ij}为二阶反对称张量。

根据定义，必然有

$$T_{ii}=0\ （不求和^{*)}） \tag{1—73}$$

因此，二阶反对称张量只有三个独立分量，等价于一个向量。

反对称张量的反对称性质也是不变的。因为

$$T_{i'j'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ij}=-\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ji}=-T_{j'i'}$$

3. 二阶张量的分解

任何一个二阶张量都可以按下面两种方式分解：

（1）分解为对称和反对称张量。

根据张量加法，有

$$T_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})+\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji}) \tag{1—74}$$

令

$$A_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji}) \tag{1—75}$$

$$B_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji}) \tag{1—76}$$

则

$$T_{ij}=A_{ij}+B_{ij} \tag{1—74$'$}$$

由式（1—75）显然有$A_{ij}=A_{ji}$，所以A_{ij}是对称张量，由式（1—76）知，B_{ij}是反对称张量。所以任何一个非对称的二阶张量都可以分解为一个对称张量和一个反对称张量之和。

---

*）根据求和约定，在单项式中应对重复指标求和，因此不求和时必须加以注明，这时表示$T_{11}=0$，$T_{22}=0$，$T_{33}=0$。以后同。

例如，弹性体变形时位移向量为v_i，则$v_{i,j}$为一个二阶张量，它可以分解为

$$v_{i,j}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})+\frac{1}{2}(v_{i,j}-v_{j,i}) \qquad (1-77)$$

其中，对称部分

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}) \qquad (1-78)$$

为应变张量；反对称部分

$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}-v_{j,i}) \qquad (1-79)$$

可以写为

$$\omega_k=\omega_{ij}e_{ijk} \qquad (1-80)$$

或

$$\omega_k=v_{i,j}e_{ijk} \qquad (1-80')$$

式中ω_k为转动分量。

（2）分解为球张量和偏张量。

设有二阶张量T_{ij}，令

$$T=\frac{1}{3}T_{ii} \qquad (1-81)$$

则称$T\delta_{ij}$为T_{ij}的球张量，而差

$$S_{ij}=T_{ij}-T\delta_{ij} \qquad (1-82)$$

称为T_{ij}的偏张量。

在弹性力学中，应力张量σ_{ij}的球张量$\sigma\delta_{ij}\left(\sigma=\frac{1}{3}\sigma_{ii}\right)$与体积变形有关，偏张量$s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}$与形状变形有关。

4. 共轭张量

若T_{ij}是二阶张量，根据张量的定义，很明显T_{ji}也是二阶张量，张量T_{ij}和T_{ji}互称共轭张量。根据前面的分析可知，一对共轭张量的和是对称张量，差是反对称张量。

第六节 张量的主轴、主值和不变量

在材料力学中，反应截面特性的惯性矩和惯性积I_x，I_y，

I_{xy}，它们的转轴关系是符合张量定义的。实际上，它们是二维空间中的二阶张量。在研究它们的性质时，曾指出它们具有惯性主轴，最大和最小惯性矩以及第一和第二不变量等。在弹性力学中研究一点应力状态和一点应变状态以及薄板中的内力矩时，几乎重复着完全相同的推演过程，并指出相同的事实——主轴，主值和不变量。实际上，这些是二阶张量基本性质，满足统一的数学规律。

设有任意一个二阶张量a_{ij}，为了便于理解，你可以把它想像为应力张量或应变张量。按式（1—51），它与任一向量b_j的线性组合仍为一向量，用c_i表示，则

$$c_i = a_{ij} b_j \qquad (a)$$

这样，a_{ij}相当于一个变换，它把一个向量变换成另外一个向量。若向量c_i与b_j共线，即向量b_j经a_{ij}变换后只改变大小不改变方向，则向量b_i的方向称为张量a_{ij}的主方向或主轴。

设

$$c_i = \lambda b_i \qquad (b)$$

式中，λ称为张量a_{ij}的主值。将（b）代入（a）得

$$a_{ij} b_j = \lambda b_i \qquad (c)$$

由式（1—9），式（c）可以写为

$$a_{ij} b_j = \lambda \delta_{ij} b_j$$

或

$$(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) b_j = 0 \qquad (d)$$

该式表示关于b_j的三个齐次方程式，b_j有非零解的条件是系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (e)$$

展开行列式得到关于λ的三次方程式：

$$\lambda^3 - \lambda^2 (a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \lambda \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right.$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\Bigg) - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-83)$$

求解该方程得到三个根，如a_{ij}对应的二阶张量矩阵是实对称的则有三个实根，设其为λ_1，λ_2，λ_3。根据熟知的方程式根与系数的关系有

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

(1—84)

我们知道，方程式的根λ_1，λ_2，λ_3是不依赖于坐标系的选择的。因此，在坐标旋转变换时I_1，I_2，I_3这三个量并不改变，称为张量的不变量，并分别称为二阶张量的第一、第二和第三不变量。对于二阶张量，独立不变量的个数是3，由此还可以组合无穷多组不变量。例如不变量

$$I_1^2 - 2I_2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{12}a_{21} + 2a_{23}a_{32} + 2a_{31}a_{13}$$
$$= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \qquad (f)$$

实际上，由张量的运算可以直接得到各种形式的不变量。例如，对a_{ij}的一对指标缩并得

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

是第一不变量；对$a_{ij}a_{kl}$两对指标缩并得

$$a_{ij}a_{ji} = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{12}a_{21} + 2a_{23}a_{32} + 2a_{31}a_{13}$$

这正是由式（f）表示的不变量。同样$a_{ij}a_{jk}a_{ki}$也是一个不变量等等。

前边已说过，如a_{ij}是对称张量，一般情形下式（1—83）

有三个不等实根。由代数理论可知，它们是具有极值性质的主值，因而具有三个主方向——主值的方向，也称为主轴，它们彼此正交。

对于对称的二阶张量a_{ij}利用连并构成标量

$$\varphi = a_{ij}x_i x_j \tag{1—85}$$

令$\varphi = 1$则得到二次曲面方程

$$a_{ij}x_i x_j = 1 \tag{1—86}$$

这样，可使每一个二阶对称张量与一个二次曲面相对应。

第二章　普遍张量的基本概念

第一节　普遍张量的记法

在这一节，我们只是给出张量的分量记法，而不定义张量。

一、上标、下标、自由指标

在第一章笛卡尔张量中，我们曾采用带下标的字母表示张量，如用a_i表示向量，用a_{ij}表示二阶张量等等。很自然地会想到，用带上标和既带上标又带下标的字母来表示张量的问题。事实正是如此，普遍张量理论同时采用上标和下标，这样表示给张量计算带来很大好处。上标称为逆变指标，下标称为协变指标。具有上标的分量称为张量的逆变分量，具有下标的分量称为张量的协变分量，同时具有上标和下标的分量称为张量的混变分量，例如

T^i——一阶逆变张量（亦称逆变向量）；

T_i——一阶协变张量（亦称协变向量）；

T^{ij}——二阶逆变张量；

T_{ij}——二阶协变张量；

$T^i_{\cdot j}$或$T_j^{\cdot i}$——二阶混变张量，圆点·表示一个空位，以区分i，j指标的次序，对称张量二者相等，记为T^i_j；

$T_{ij}^{\cdot\cdot k}$——三阶混变张量。

上面字母中的指标，上标或下标都称为自由指标。在n维空间中，每个自由指标的取值范围为1，2，…n；三维空间中取值1，2，3；二维空间取值1，2。改变自由指标的字母不影响它的含义，例如a_i也可以记为a_k。

我们采用字母加指标的记法来记张量，但是不意味着采用指标记法的量就是张量，只有满足确定变换规律的量才是张量，见

第四节。对于张量，自由指标的个数就是张量的阶数。标量只有一个分量，没有自由指标，称为零阶张量，向量有一个自由指标，称为一阶张量。

在n维空间中，一个r阶张量分量的数目等于n^r，三维空间为3^r，二维空间为2^r。本书一般只研究三维和二维空间中的张量，但是完全可以推广到n维空间。

这里，只约定了记法，并没有定义张量。因此，例如对于向量，到底什么是逆变向量，什么是协变向量，二者有什么关系等问题，将在后面几节里详细研究。

二、爱因斯坦（Einstein）求和约定。哑标

在普遍张量理论中，求和简记法是这样规定的：在一个单项式中，同一个指标出现两次，且一次作为上标，一次作为下标，就表示对该指标求和。这一规定通常称为爱因斯坦约定。上述表示求和的重复指标，在求和后不再出现，称为哑标（或傀标）。哑标的字母可以任意改变而不影响原式的数量关系。例如

$$\xi^i = a^i_j x^j \qquad (2-1)$$

亦可写为

$$\xi^i = a^i_k x^k$$

其展开式都为

$$\xi^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3$$

$$\xi^2 = a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_3 x^3$$

$$\xi^3 = a^3_1 x^1 + a^3_2 x^2 + a^3_3 x^3$$

注意不要把上标与乘方相混。另外，与笛卡尔张量不同，求和指标必须一个是上标，一个是下标，而在一个单项式中不会出现相同的下标或上标。

三、克罗内克尔δ记号

在普遍张量理论里，克罗内克尔记号定义为

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \qquad (2-2)$$

对于记号δ^i_j，可以直接由定义及求和约定证明下列各式：

1. $\delta^i_i = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 3$　　(2—3)
2. $\delta^i_k \delta^k_j = \delta^i_j$　　(2—4)
3. $\delta^i_j \delta^j_i = \delta^i_i = 3$　　(2—5)
4. $\delta^i_j \delta^j_k \delta^k_l = \delta^i_l$　　(2—6)
5. $\delta^i_k x^k = x^i$　　(2—7)
6. $a_{ik} \delta^k_j = a_{ij}$　　(2—8)

记号δ^i_j还将在表示和推导张量方程中得到应用。

四、置 换 符 号

在普遍张量中，除了采用像笛卡尔张量中带下标的置换符号e_{ijk}外，还采用带上标的置换符记e^{ijk}，它们定义为

$$e^{ijk} = e_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{若}(i, j, k)\text{为循环序列；} \\ -1, & \text{若}(i, j, k)\text{为逆循环序列；} \\ 0, & \text{若}(i, j, k)\text{为非循环序列。} \end{cases} \qquad (2-9)$$

关于循环序列、逆循环序列和非循环序列参见式（1—14）的说明。

利用置换符号可以简化公式的表示。举例如下：

1. 表示行列式。令三阶行列式

$$a = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \qquad (2-10)$$

其展开式为：

$$a = a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_3 a^2_1 a^3_2 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 - a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_1 a^2_3 a^3_2 - a^1_2 a^2_1 a^3_3$$

利用置换符号，上式可以写为

$$a = e^{lmn} a^1_l a^2_m a^3_n \qquad (2-11)$$

或

$$a=e_{ijk}a_1^i a_2^j a_3^k \qquad (2-12)$$

上二式的正确性可以用展开法直接证明。

如把式（2—12）的右端改写为$e_{ijk}a_2^i a_1^j a_3^k$，这就相当于交换了原行列式中的两列，对应

$$-a=\begin{vmatrix} a_2^1 & a_1^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_1^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \qquad (2-13)$$

它可以表示为

$$e_{213}a=e_{ijk}a_2^i a_1^j a_3^k \qquad (2-14)$$

式（2—10）的奇次换列得$-a$，偶次换列得a，一般地可以表为

$$e_{lmn}a=e_{ijk}a_l^i a_m^j a_n^k \qquad (2-15)$$

如果是换行，类似地有

$$e^{ijk}a=e^{lmn}a_i^l a_j^m a_k^n \qquad (2-16)$$

当用更普遍的行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_r^o & a_s^o & a_t^o \\ a_r^p & a_s^p & a_t^p \\ a_r^q & a_s^q & a_t^q \end{vmatrix} \qquad (2-17)$$

代替式（2—10）时，显然若$o=r=1, p=s=2, q=t=3$，则有$A=a$，对于更一般的情形有

$$A=ae^{opq}e_{rst} \qquad (2-18)$$

完全类似地可以导出下列各式：

$$a=|a^{pq}|=e_{ijk}a^{i1}a^{j2}a^{k3}=e_{lmn}a^{1l}a^{2m}a^{3n} \qquad (2-19)$$

$$e^{lmn}a=e_{ijk}a^{il}a^{jm}a^{kn} \qquad (2-20)$$

$$e^{ijk}a=e_{lmn}a^{il}a^{jm}a^{kn} \qquad (2-21)$$

及

$$a=|a_{pq}|=e^{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}=e^{lmn}a_{1l}a_{2m}a_{3n} \qquad (2-22)$$

$$e_{lmn}a=e^{ijk}a_{il}a_{jm}a_{kn} \qquad (2-23)$$

$$e_{ijk}a=e^{lmn}a_{il}a_{jm}a_{kn} \qquad (2-24)$$

例题1 试证明：两个同阶方阵A与B之积（$C=AB$）的行列式等于A与B的行列式之积。

证明以3 × 3 阶方阵为例。令

$$A=[a^i_j],\quad B=[b^j_k],\quad C=[c^i_k]$$

则

$$c^i_k=a^i_j b^j_k$$

A和B的行列式为

$$\det A=a=e^{lmn}a^1_l a^2_m a^3_n$$

$$\det B=b$$

又

$$e^{lmn}b=e^{ijk}b^l_i b^m_j b^n_k$$

于是

$$ab=a^1_l a^2_m a^3_n e^{lmn}b=a^1_l a^2_m a^3_n b^l_i b^m_j b^n_k e^{ijk}$$

$$=c^1_i c^2_j c^3_k e^{ijk}=c$$

2. 向量的叉积。设

$$\boldsymbol{a}=a^j\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{b}=b^k\boldsymbol{e}_k,\quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=c_i\boldsymbol{e}^i$$

（设$\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}^i$都是单位正交基向量）则有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}^2 & \boldsymbol{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}$$

展开式为

$$\boldsymbol{c}=(a^2b^3-a^3b^2)\boldsymbol{e}^1+(a^3b^1-a^1b^3)\boldsymbol{e}^2+(a^1b^2-a^2b^1)\boldsymbol{e}^3$$

与$\boldsymbol{c}=c_i\boldsymbol{e}^i$对比得到

$$c_1=a^2b^3-a^3b^2=e_{1jk}a^jb^k$$

$$c_2=a^3b^1-a^1b^3=e_{2jk}a^jb^k$$

$$c_3=a^1b^2-a^2b^1=e_{3jk}a^jb^k$$

或统一表示为

$$c_i=e_{ijk}a^jb^k \tag{2—25}$$

五、求普通导数的简记法

若取坐标参数为x^j，则偏导数记为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j}=u_{i,j}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=u^i{}_{,j}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^j}=u_{,j}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j\partial x^k}=u_{i,jk}$$

在一些著作中也记为$\frac{\partial u_i}{\partial x^j}=\partial_j u_i$，$\frac{\partial u}{\partial x^j}=\partial_j u$，$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j\partial x^k}=\partial_j\partial_k u_i$等等。

除了上述的记法外，还有其它符号将在后面介绍。

例题 2　用张量记法表示矩阵相乘。设

$\boldsymbol{A}=[a^i_j]$，$\boldsymbol{B}=[b^{ij}]$，试表示：① $\boldsymbol{AB}$；② ABA^T。

① 设$\boldsymbol{C}=[c^{ij}]$，则

$$c^{ik}=a^i_j b^{jk}$$

② 设$\boldsymbol{D}=[d^{ij}]$，则

$$d^{ij}=a^i_k a^j_m b^{km}$$

第二节　基向量、向量的逆变分量和协变分量

一个物理或力学问题，总是在一定的空间发生的，但是它的内在规律不应该依赖于所选择的坐标系，或者说自然规律是协变的，也就是描述自然规律的数学表达式的形状不应随坐标系的选择而改变。

例如，我们知道，弹性力学问题所应满足的自然规律包括平衡关系、几何关系和物理关系三个方面。为了求解的方便，在处理具体问题时总要选择某种特殊的坐标系，为此曾经建立了各种坐标下的基本方程式，如直角坐标、柱坐标等。我们发现同一个方程在不同的坐标系中有着明显的差别，而且建立这些方程也是相当麻烦的。因此，就想一方面在解决具体问题时利用坐标系，

另一方面，在建立描述自然规律的方程时摆脱坐标系。为了作到这一点，就要建立对任何坐标系都成立的张量方程。从这一节开始我们就来研究物理量在不同坐标系间的关系。

如果是一个标量，例如功、能量，它不管你选择什么样的坐标系总是不变的。

如果是向量（如力、位移）或张量（如应力张量、应变张量），它们的分量将随着所选取的坐标系和基向量而变化。至于如何选择坐标系，要视具体问题而定。而基向量的选择要便于计算，使所表示的物理量较好，即具有张量形式。譬如，第一章的笛卡尔张量，采用三个相互正交的单位向量作为基向量是很合适的，但是把它用于斜角坐标或曲线坐标就不方便了，下面详细讨论这一问题。

一、笛卡尔直角坐标系

这是人们比较熟悉的坐标系，应用广泛，物理问题的数学表达式在这样的坐标系里往往比较简单。第一章已经研究了笛卡尔张量的计算，并且只用了带下标的量，这一章开始同时采用上标和下标记法。

在笛卡尔直角坐标系常采用三个相互垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$作为基向量。（图2—1）。为便于采用张量记法，置

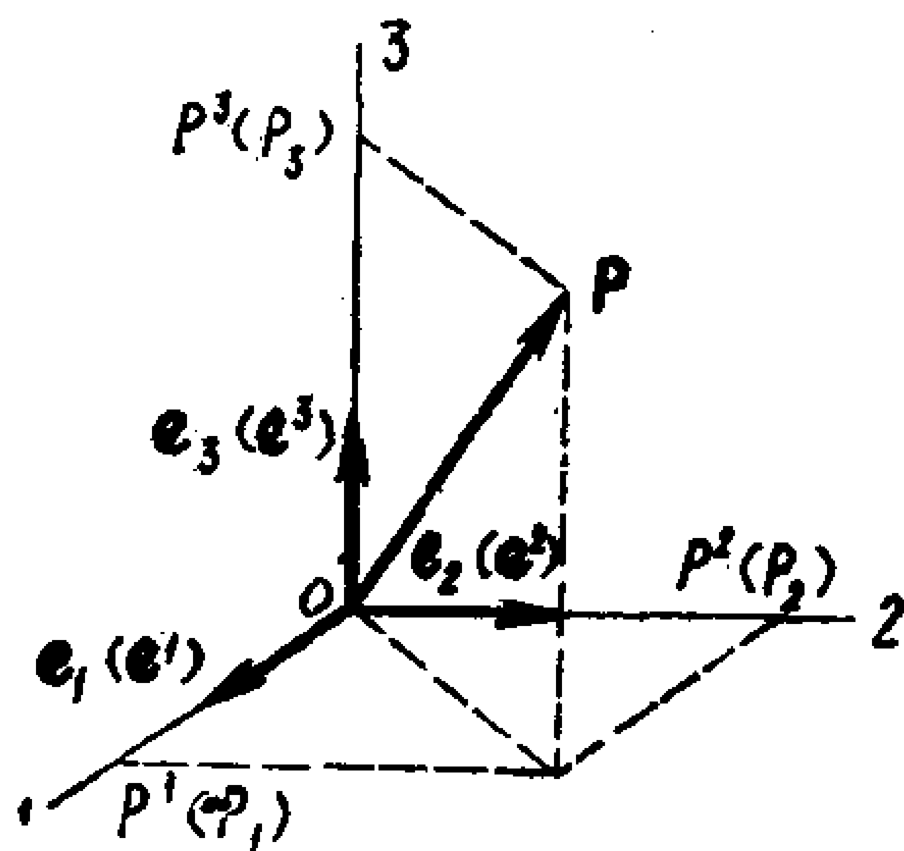


图 2—1

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k} \qquad (2—26)$$

任何一个向量都可以用三个基向量的线性组合来表示。例如，力向量$\boldsymbol{P}$可表为

$$\boldsymbol{P}=P^1\boldsymbol{e}_1+P^2\boldsymbol{e}_2+P^3\boldsymbol{e}_3=P^i\boldsymbol{e}_i \qquad (2—27)$$

位移向量$\boldsymbol{u}$可表为

$$\boldsymbol{u}=u^1\boldsymbol{e}_1+u^2\boldsymbol{e}_2+u^3\boldsymbol{e}_3=u^i\boldsymbol{e}_i \qquad (2—28)$$

上列各式中带下标的基向量$\boldsymbol{e}_i$称为协变基向量，P^i，u^i分别称为向量$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{u}$的逆变分量。如用上标表示基向量，置

$$\boldsymbol{e}^1=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{e}^2=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{e}^3=\boldsymbol{k} \tag{2-29}$$

则向量$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{u}$还可分别表为

$$\boldsymbol{P}=P_1\boldsymbol{e}^1+P_2\boldsymbol{e}^2+P_3\boldsymbol{e}^3=P_j\boldsymbol{e}^j \tag{2-30}$$

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}^1+u_2\boldsymbol{e}^2+u_3\boldsymbol{e}^3=u_j\boldsymbol{e}^j \tag{2-31}$$

式中，$\boldsymbol{e}^j$称为逆变基向量，P_j、u_j分别称为向量$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{u}$的协变分量。

根据上面的表示和求和约定，计算向量的点积，例如力$\boldsymbol{P}$在位移$\boldsymbol{u}$上所作的功可以表示为

$$W=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}=P^iu_i=P^ju_j \tag{2-32}$$

上面计算中采用了两种基向量：协变基向量$\boldsymbol{e}_i$和逆变基向量$\boldsymbol{e}^j$，都是单位向量。实际上，两种基向量是重合着的。任意向量用这两组基向量表示，相应地得到向量的逆变分量和协变分量，它们都是向量在相应坐标轴上的投影，向量点积例如功的表达式（2—32），有两种形式。但是，在笛卡尔直角坐标系里看不出有区分逆变和协变的必要，因为除了记号上的改变，没有增加新的内容，也没有带来特别的方便，然而把这里所用的概念推广应用到斜角坐标或曲线坐标系就有了新的意义了。

二、笛卡尔斜角坐标系

一般情形，似乎在直角坐标系里可以把物理上的基本方程表示得简单些，但是求解问题并不总是方便的，例如分析一个斜交板利用斜角坐标就更方便些，这就需要研究物理量或几何量在笛卡尔斜角坐标系的表示。

设三个不共面的单位向量$\boldsymbol{e}_1^*$、$\boldsymbol{e}_2^*$、$\boldsymbol{e}_3^*$（彼此并不一定正交）构成斜角坐标系的协变基向量。因为它们彼此线性无关，所以任何一个向量都可以通过它们表示，例如，力向量$\boldsymbol{P}$可以表为

$$\boldsymbol{P}=P^1\boldsymbol{e}_1^*+P^2\boldsymbol{e}_2^*+P^3\boldsymbol{e}_3^*=P^i\boldsymbol{e}_i^* \tag{2-33}$$

式中，P^i称为向量$\boldsymbol{P}$的逆变分量，见图2—2，二维情形见图

2—3。向量的分解和合成符合平行四边形法则。

式（2—33）与直角坐标系中的式（2—27）具有同样简洁的形式。但是必须注意，这时向量的逆变分量并不等于向量在坐标轴上的投影。因此，若位移向量表示为

$$\boldsymbol{u}=u^1\boldsymbol{e}_1^*+u^2\boldsymbol{e}_2^*+u^3\boldsymbol{e}_3^*=u^i\boldsymbol{e}_i^* \qquad (2-34)$$

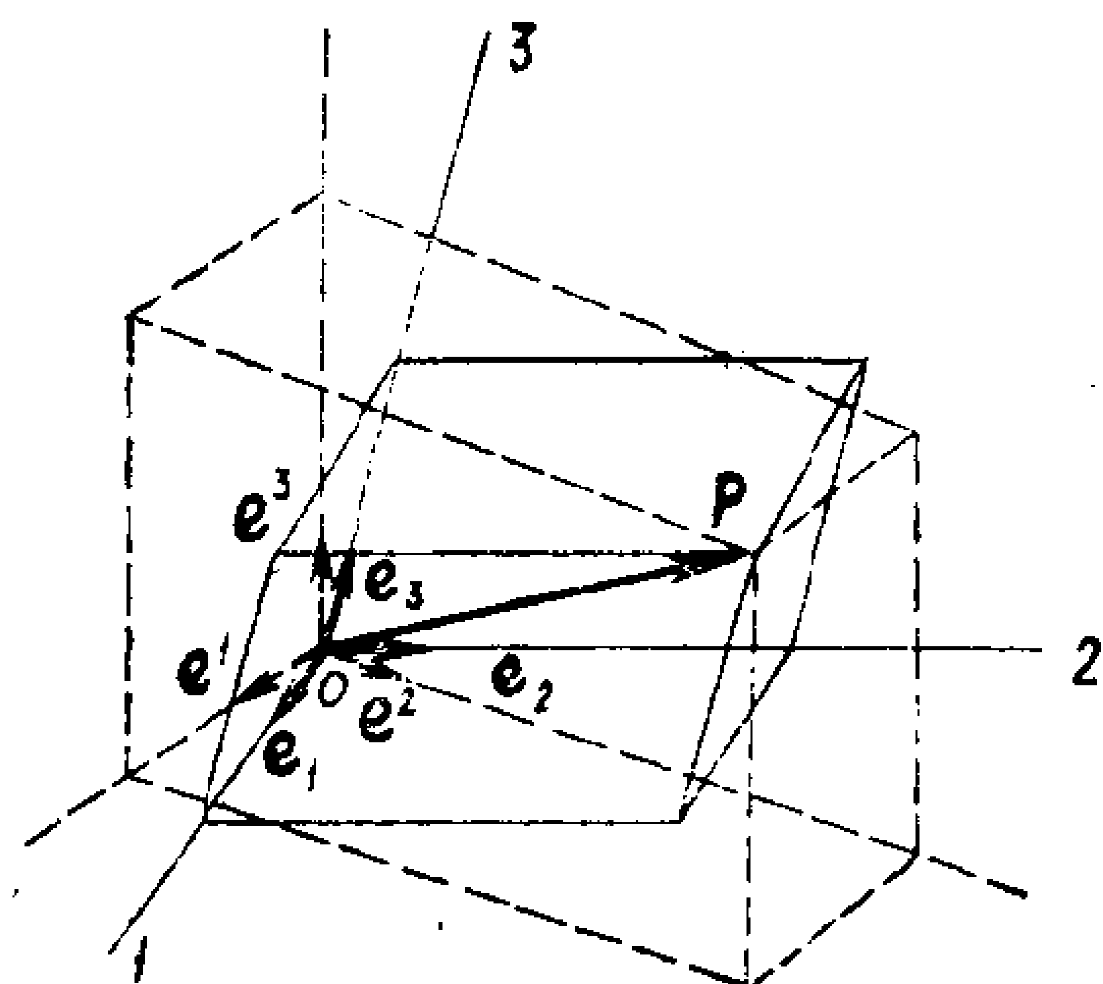


图 2—2

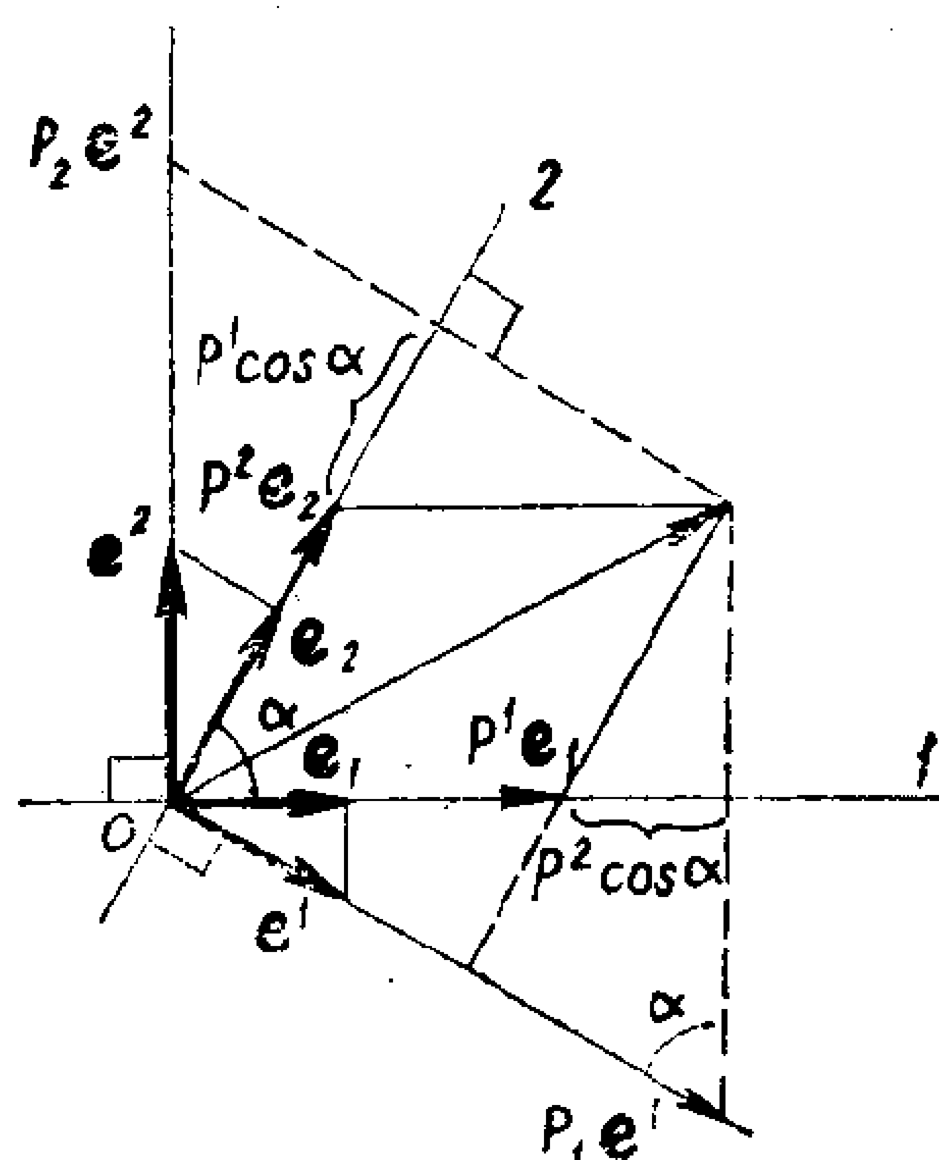


图 2—3

则功$W\neq P^1u^1+P^2u^2+P^3u^3$。我们就二维情形计算功的大小，假设坐标轴1与2的夹角为α，则$\boldsymbol{e}_1^*\cdot\boldsymbol{e}_1^*=\boldsymbol{e}_2^*\cdot\boldsymbol{e}_2=1$，$\boldsymbol{e}_1^*\cdot\boldsymbol{e}_2^*=\boldsymbol{e}_2^*\cdot\boldsymbol{e}_1^*=\cos\alpha$，所以

$$W=\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{u}=(P^1\boldsymbol{e}_1^*+P^2\boldsymbol{e}_2^*)\cdot(u^1\boldsymbol{e}_1^*+u^2\boldsymbol{e}_2^*)$$
$$=P^1u^1+P^2u^2+(P^1u^2+P^2u^1)\cos\alpha$$

这样看来，只采用逆变分量，在斜角坐标系中不能把功表示为简洁形式。现在我们引入一个新的基向量，用带上标的向量$\boldsymbol{e}^{*1}$、$\boldsymbol{e}^{*2}$、$\boldsymbol{e}^{*3}$表示，称为逆变基向量。逆变基向量由协变基向量按下式确定（见图2—2、2—3）：

$$\boldsymbol{e}^{*j}\cdot\boldsymbol{e}_i^*=\delta_i^j \qquad (2-35)$$

由该式可知：

1. $\boldsymbol{e}^{*j}\perp\boldsymbol{e}_i^*$ $(j\neq i)$；

2. 逆变基向量$\boldsymbol{e}^{*i}$不是单位向量。其二维情形，由式（2—35）的关系有

$$\boldsymbol{e}^{*1}\cdot\boldsymbol{e}_1^*=|\boldsymbol{e}^{*1}|\cdot|\boldsymbol{e}_1^*|\cos(90-\alpha)=1$$

而 $$|e_1^*| = 1$$

所以 $$\left| e^{*1} \right| = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad (2-36)$$

同理 $$\left| e^{*2} \right| = \frac{1}{\sin\alpha}$$

式中，α是原斜角坐标系1轴和2轴的夹角。

因为协变基向量是线性独立的，根据式（2—35），逆变基向量也是线性独立的。因此向量$\boldsymbol{P}$也可以用逆变基向量的线性组合表示，为

$$\boldsymbol{P} = P_1\boldsymbol{e}^{*1} + P_2\boldsymbol{e}^{*2} + P_3\boldsymbol{e}^{*3} = P_j\boldsymbol{e}^{*j} \qquad (2-37)$$

式中，P_j称为向量$\boldsymbol{P}$的协变分量。

由于$\boldsymbol{P}$同时由式（2—33）和（2—37）确定，所以$\boldsymbol{P}$的逆变分量和协变分量必然存在着固定的关系。在二维情形，显然有

$$P_1\boldsymbol{e}^{*1} + P_2\boldsymbol{e}^{*2} = P^1\boldsymbol{e}_1^* + P^2\boldsymbol{e}_2^*$$

分别用$\boldsymbol{e}_1^*$，$\boldsymbol{e}_2^*$点乘上式两边，并注意$\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{e}_i^* = 1$（不求和），$\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{e}_j^* = \cos\alpha$（$i \neq j$）及$\boldsymbol{e}^{*j}\cdot\boldsymbol{e}_i^* = \delta_i^j$，则得

$$P_1 = P^1 + P^2\cos\alpha$$

$$(2-38)$$

$$P_2 = P^2 + P^1\cos\alpha$$

它的几何解释可由图2—3见到。向量的逆变分量与协变分量的一般关系见第三章。

现在我们再来计算功或向量的点积，并把一个向量用逆变分量表示，另一个用协变分量表示。如置

$$\boldsymbol{P} = P_i\boldsymbol{e}^{*i}, \quad \boldsymbol{u} = u^j\boldsymbol{e}_j^*$$

则

$$W = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} = P_i\boldsymbol{e}^{*i}\cdot u^j\boldsymbol{e}_j^* = P_i u^j \delta_j^i = P_i u^i$$

如置$\boldsymbol{P} = P^i\boldsymbol{e}_i^*$，$\boldsymbol{u} = u_j\boldsymbol{e}^{*j}$则有$W = P^j u_j$。所以功可用两种形式，简洁的表为

$$W = P_i u^i = P^j u_j \qquad (2-39)$$

这两种表示的几何解释可见图2—4。

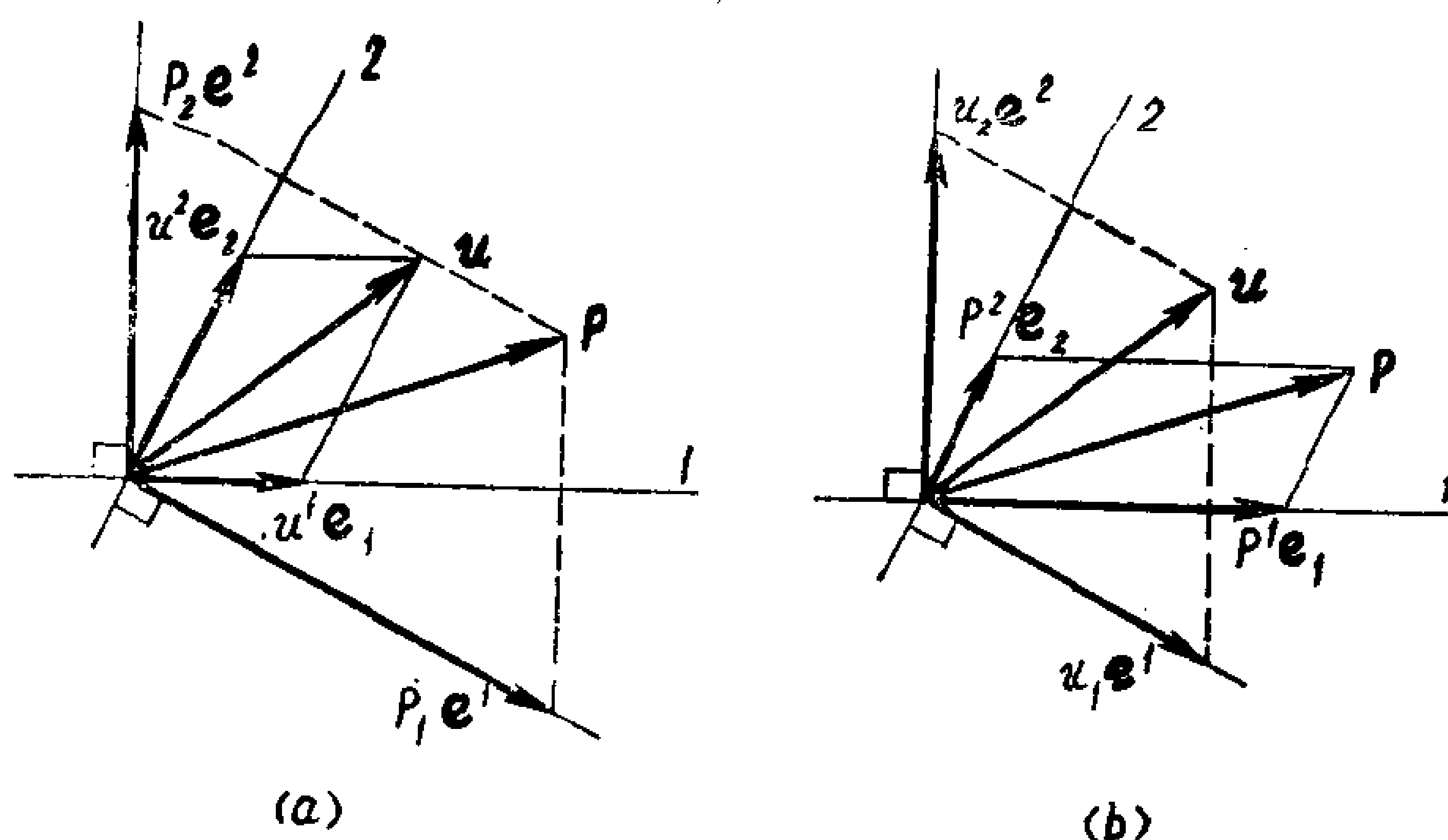


图 2—4

设u，v是任意两向量，同样有

$$u \cdot v = u^i v_i = u_j v^j \tag{2-40}$$

三、柱 坐 标 系

现在考虑圆柱坐标系（简称柱坐标系）的情形。任何一个空间点上的向量都可以在协变基向量或逆变基向量上分解，这可以从两个方面来理解：

1. 空间有个固定的坐标系，基向量固定在坐标原点，把向量移至原点分解，然后再移回到作用点；

2. 在空间的每一点上都有一组基向量，向量在作用点就地按基向量分解，这时把基向量看成是一个活动标架，可以随时安放在每一个空间点上。

对于直线坐标系，由于通过空间任意点的坐标线都有相同的方向，所以活动标架上的基向量和固定在原点的基向量无论大小和方向都是相同的。

对于曲线坐标系，在某坐标原点建立一组固定基向量是无意义的，所以只能采取上面的第二种作法建立活动标架，协变基向量的方向切于该点坐标曲线并指向坐标增加的方向，可以取为单位向量，也可以不是单位向量，但是进行张量运算取单位向量并不方便。

这里我们来考查柱坐标，在A点安上由协变基向量构成的活动标架$\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_i$是相互正交的单位向量（图2—5）。

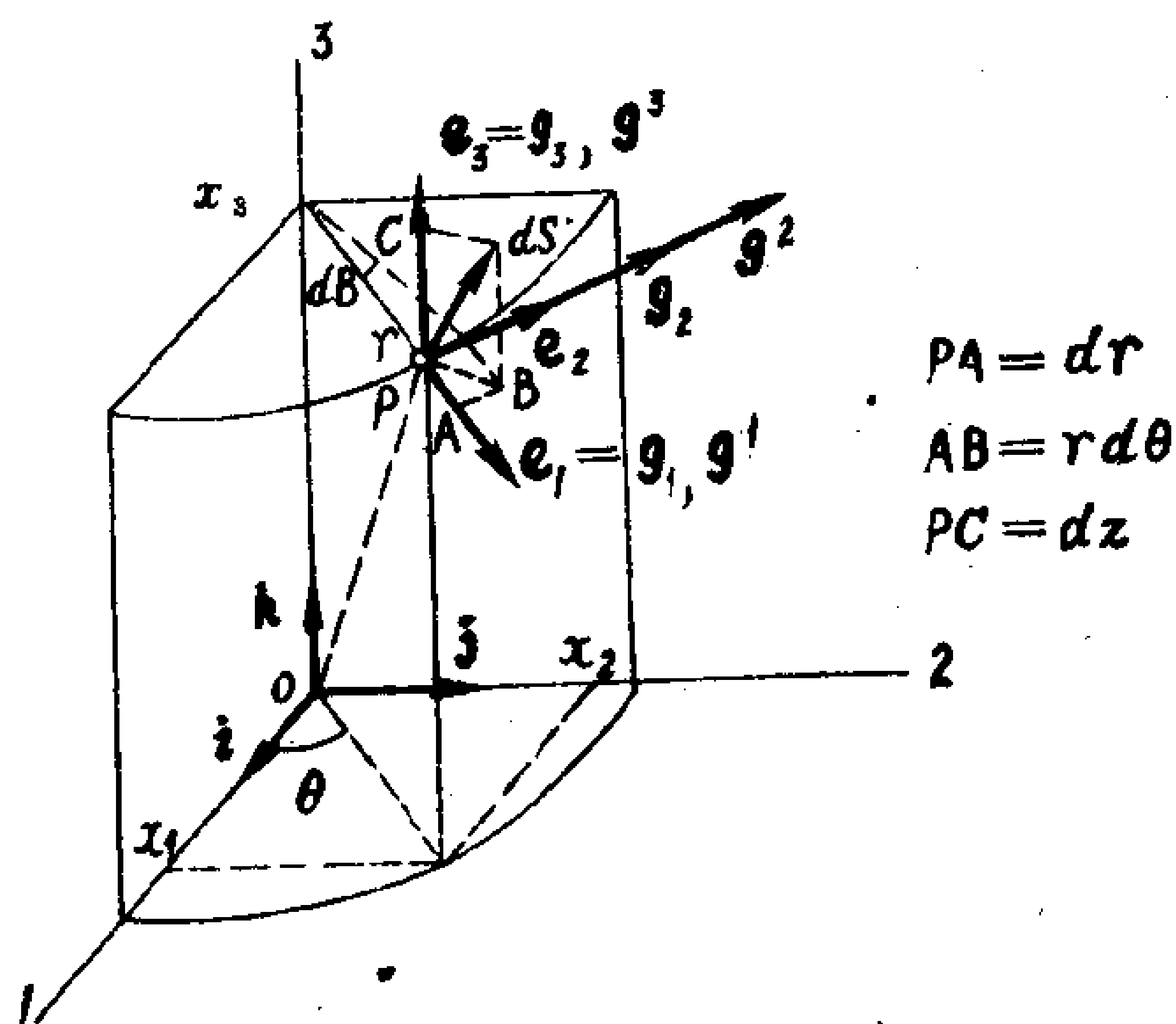


图 2—5

过A点的某线元向量$d\boldsymbol{s}$可以表为

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}_1 dr+\boldsymbol{e}_2\cdot r d\theta+\boldsymbol{e}_3 dz \qquad (2-41)$$

这实际上是把dr、$rd\theta$、dz看成向量$d\boldsymbol{s}$的逆变分量了，由于有类似于$rd\theta$项的出现将给运算带来不便。如果我们稍微的变化一下，取坐标的微分为向量$d\boldsymbol{s}$的逆变分量，前边的系数作为协变基向量，并分别记为

$$dx^1=dr,\ dx^2=d\theta,\ dx^3=dz \qquad (2-42)$$

和

$$\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot r,\ \boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{e}_3 \qquad (2-43)$$

这样，式（2—41）可重新写为

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_1 dx^1+\boldsymbol{g}_2 dx^2+\boldsymbol{g}_3 dx^3=\boldsymbol{g}_i dx^i$$

由此看出，在柱坐标中，$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_3$是单位向量，$\boldsymbol{g}_2$不是单位向量，而且也不是常量，$|\boldsymbol{g}_2|=r$，即$\boldsymbol{g}_2$的大小依赖于坐标r，有量纲；$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$的方向还随θ而变化。

四、任意坐标系

用上面的方法，对任意坐标系（包括直线的和曲线的），总

可以把线元向量表示为下面的坐标微分形式

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_i dx^i \qquad (2-44)$$

式中　dx^i——坐标的微分；

$\boldsymbol{g}_i$——协变基向量。

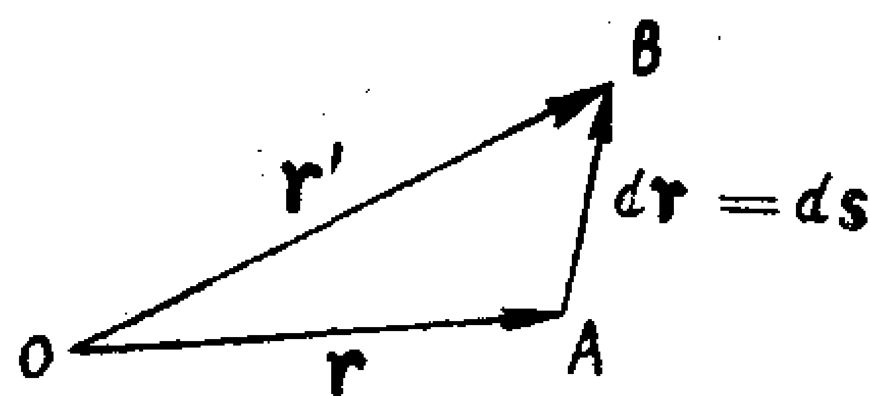


图　2－6

对于任意的曲线坐标系，$\boldsymbol{g}_i$中的每一个都不是单位向量，都是坐标的函数并且具有量纲。

今后将采用由式（2－44）确定的在所有坐标系都适用的协变基向量。下面推导基向量的具体表达式。

假设空间两邻近点A和B，它们对某固定点O（例如原点）的位置向量分别为$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$，$A$、$B$间的线元向量$d\boldsymbol{s}$等于位置向量的增量$d\boldsymbol{r}$，即$d\boldsymbol{s}=d\boldsymbol{r}$。（图2－6）。向量$\boldsymbol{r}$是坐标的函数，因此有

$$d\boldsymbol{s}=d\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}dx^3$$

$$=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}dx^i \qquad (2-45)$$

比较式（2－44）、（2－45）得

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}=\boldsymbol{r}_{,i} \qquad (2-46)$$

由此式得出，协变基向量等于位置向量对相应曲线坐标的偏导数，其方向与坐标曲线相切。若选定了确定的曲线坐标就可按式（2－46）求得协变基向量，其大小和方向都与坐标有关。

根据协变基向量$\boldsymbol{g}_i$按下式定义逆变基向量$\boldsymbol{g}^j$，使

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j \qquad (2-47)$$

该式指出，逆变基向量中的每一个与不同指标的协变基向量正交，每一个的大小都不一定是单位向量，而且也可以具有量纲。

协变基向量与逆变基向量互称互逆基向量。已知一种形式的基向量后就可由式（2－47）确定互逆基向量。但是，这样做不方便，具体求法将在后面详述（见第三节和第三章第一节）。

例题 1 试由式（2—46）确定笛卡尔直角坐标系中的协变基向量和逆变基向量。

位置向量$\boldsymbol{r}$在笛卡尔直角坐标系中可以表为

$$\boldsymbol{r}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+x^3\boldsymbol{e}_3 \qquad (a')$$

式中，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$是相互正交的单位向量；x^1、x^2、x^3是坐标。按式（2—46），有

$$\boldsymbol{g}_x=\boldsymbol{g}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}=\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{g}_y=\boldsymbol{g}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}=\boldsymbol{e}_2 \qquad (b')$$

$$\boldsymbol{g}_z=\boldsymbol{g}_3=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}=\boldsymbol{e}_3$$

然后，根据式（2—47）有 $\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2=0$，$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_3=0$，$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1=1$，所以$\boldsymbol{g}^1$是与$\boldsymbol{g}_2$、$\boldsymbol{g}_3$垂直的单位向量，即 $\boldsymbol{g}^x=\boldsymbol{g}^1=\boldsymbol{e}_1$，同理 $\boldsymbol{g}^y=\boldsymbol{g}^2=\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{g}^z=\boldsymbol{g}^3=\boldsymbol{e}_3$。

例题 2 试确定平面极坐标中的协变基向量和逆变基向量。（图 2—7）。

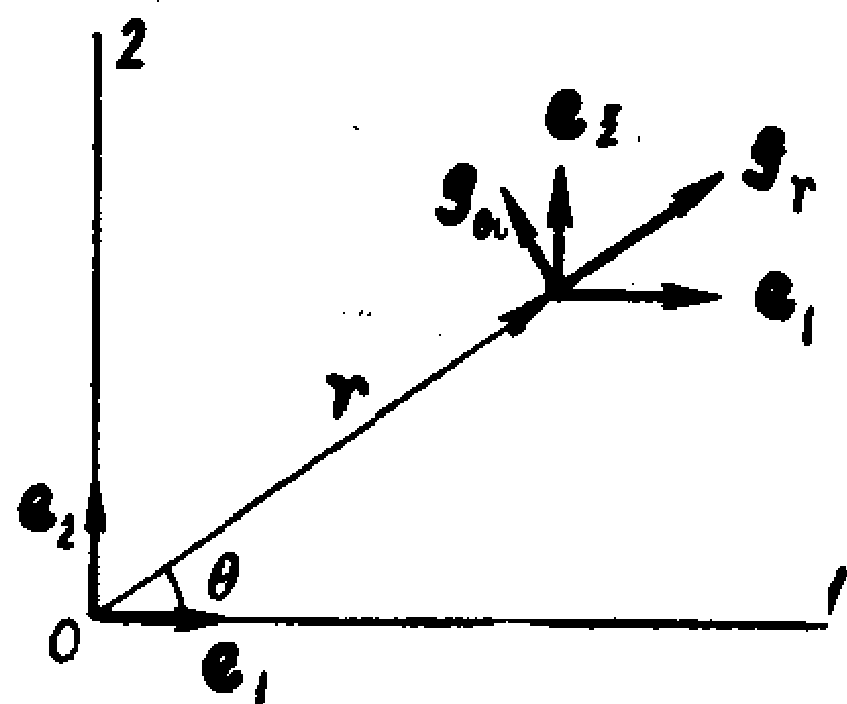


图 2—7

位置向量$\boldsymbol{r}$可以表为

$$\boldsymbol{r}=r\cos\theta\boldsymbol{e}_1+r\sin\theta\boldsymbol{e}_2 \qquad (a')$$

坐标取为$x^1=r$，$x^2=\theta$，由式（2—46）求得

$$\boldsymbol{g}_r=\boldsymbol{g}_1=\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial r}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{g}_\theta=\boldsymbol{g}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}=-r\sin\theta\boldsymbol{e}_1+r\cos\theta\boldsymbol{e}_2 \qquad (b')$$

很明显，$|\boldsymbol{g}_r|=1$，$|\boldsymbol{g}_\theta|=r$。

由$\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}_\theta=0$，$\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}_r=1$及式（$b'$）有

$$\boldsymbol{g}^r=\boldsymbol{g}_r=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2 \qquad (c')$$

又由$\boldsymbol{g}^\theta\cdot\boldsymbol{g}_r=0$，$\boldsymbol{g}^\theta\cdot\boldsymbol{g}_\theta=1$得$\boldsymbol{g}^\theta\perp\boldsymbol{g}_r$，即方向与$\boldsymbol{g}_\theta$一致，其大小

可由 $|\boldsymbol{g}^{\theta}|\cdot|\boldsymbol{g}_{\theta}|=1$， $|\boldsymbol{g}_{\theta}|=r$求得 $|\boldsymbol{g}^{\theta}|=\frac{1}{r}$。所以

$$\boldsymbol{g}^{\theta}=-\frac{\sin\theta}{r}\boldsymbol{e}_1+\frac{\cos\theta}{r}\boldsymbol{e}_2 \qquad (d')$$

例题 3　求平面斜角坐标系中的协变基向量并求出 $|\boldsymbol{g}_{\xi}|$ 及 $|\boldsymbol{g}_{\eta}|$。（图 2—8）。

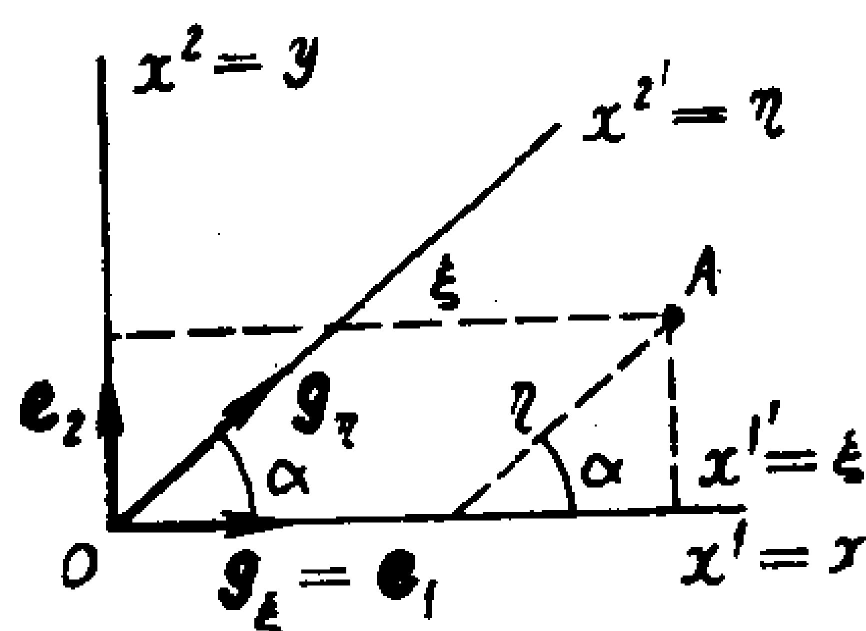


图　2—8

设斜角坐标系的坐标参数为 ξ和η，由图 2—8 有

$$x=\xi+\eta\cos\alpha,\quad y=\eta\sin\alpha \qquad (a')$$

所以

$$\boldsymbol{r}=(\xi+\eta\cos\alpha)\boldsymbol{e}_1+\eta\sin\alpha\boldsymbol{e}_2 \qquad (b')$$

代入式（2—46），得

$$\boldsymbol{g}_{\xi}=\boldsymbol{g}_1=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi}=\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{g}_{\eta}=\boldsymbol{g}_2=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\eta}=\cos\alpha\boldsymbol{e}_1+\sin\alpha\boldsymbol{e}_2 \qquad (c')$$

显然，此二向量的夹角为α，大小分别为

$$|\boldsymbol{g}_{\xi}|=1,\quad |\boldsymbol{g}_{\eta}|=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}=1 \qquad (d')$$

例题 4　求椭圆—双曲坐标系中的协变基向量(图2—9)。

设曲线坐标参数 $x^1=\xi$，$x^2=\eta$，它与直角坐标x和y的关系为

$$x=\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta,\quad y=\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta \qquad (a')$$

所以

$$\boldsymbol{r}=\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta\boldsymbol{e}_1+\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta\boldsymbol{e}_2 \qquad (b')$$

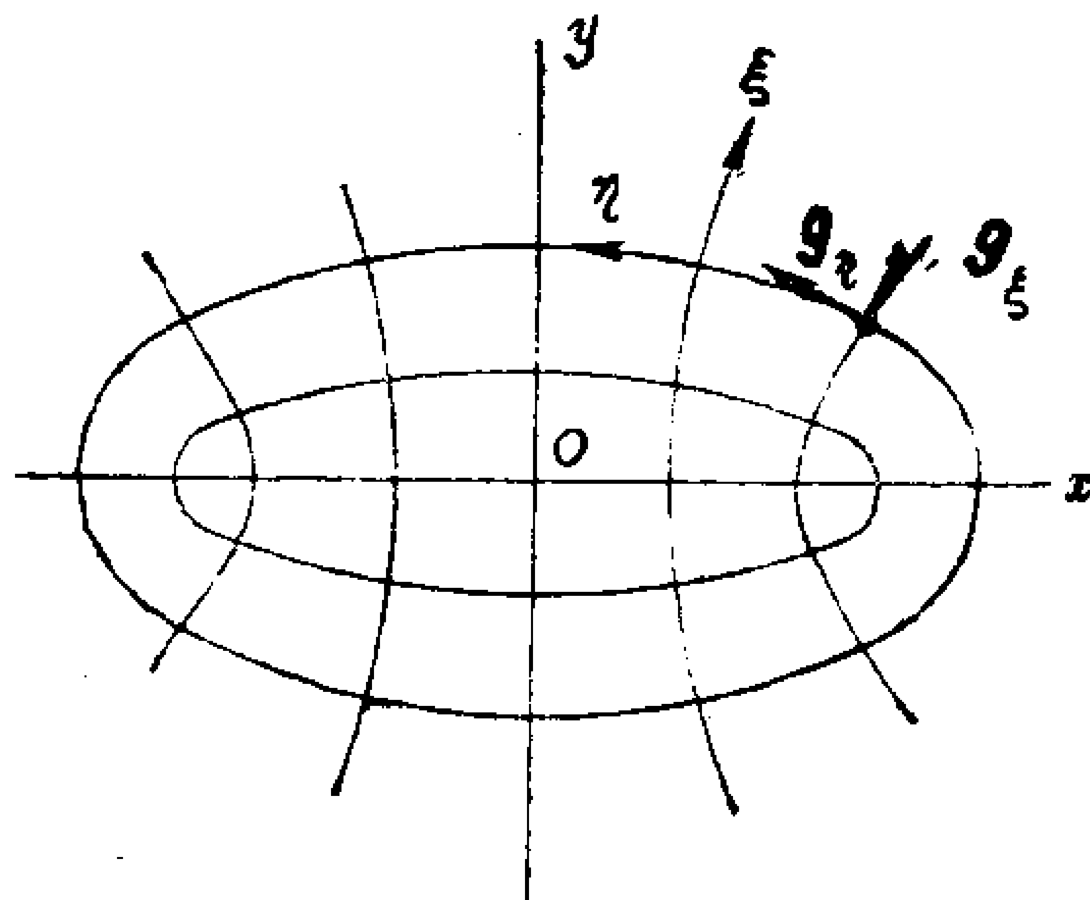


图　2—9

由式（2—46）求得

$$\boldsymbol{g}_\xi=\boldsymbol{g}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi}=\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta\,\boldsymbol{e}_1+\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta\,\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{g}_\eta=\boldsymbol{g}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta}=-\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta\,\boldsymbol{e}_1+\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta\,\boldsymbol{e}_2 \qquad (c')$$

五、向量的逆变分量和协变分量

在最一般情形下，适应于任何坐标系的协变基向量和逆变基向量为$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$。则任何一个向量$\boldsymbol{P}$都可以表示为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{g}_iP^i \qquad (2—48)$$

或

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{g}^jP_j \qquad (2—49)$$

式中 $\boldsymbol{P}$——粗体字向量（向量的不变性记法）；

P^i——向量的逆变分量；

P_j——向量的协变分量。

由于基向量、P^i、P_j都可以具有量纲，所以只能使$\boldsymbol{g}_iP^i$，$\boldsymbol{g}^jP_j$中的每一项具有与$\boldsymbol{P}$相同的量纲。如果$\boldsymbol{P}$为一个力向量，$\boldsymbol{g}_i$无量纲，则分量P^i具有力的量纲，若$\boldsymbol{g}_i$有量纲，则P^i就不具有力的量纲，而$\boldsymbol{g}_iP^i$具有力的量纲。

如$\boldsymbol{P}$表示力，$\boldsymbol{u}$表示位移，在任何坐标系中都可以把功W表示为如下的简洁形式：

$$W=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}=P^i\boldsymbol{g}_i\cdot u_j\boldsymbol{g}^j=P^iu_j\delta_i^j=P^iu_i \qquad (2—50)$$

或

$$W=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}=P_i\boldsymbol{g}^i\cdot u^j\boldsymbol{g}_j=P_iu^j\delta_j^i=P_ju^j \qquad (2—51)$$

第三节 坐 标 变 换

由于坐标系的选取是人为的，所以不同坐标系中的物理量有着固定的联系。这一节我们研究不同坐标系中基向量和任意其它向量的变换规律。

一、坐标变换，变换系数

如果用x^i表示旧坐标系中的坐标参数，$x^{i'}$表示新坐标系中的坐标参数，两者的关系为

$$x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}), \quad i = 1, 2, 3 \qquad (2-52)$$

这就是由坐标x^i到坐标$x^{i'}$的变换式，其反变换式为

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3), \quad i' = 1', 2', 3' \qquad (2-53)$$

反变换式（2—53）存在的条件是函数式（2—52）在$x^{i'}$取值范围内单值连续、存在一阶偏导数，且雅可比（Jacobian）行列式

$$J = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2-54)$$

关系式（2—52）或（2—53）确定了从一个坐标系到另一个坐标系的坐标变换。这在笛卡尔张量里就是式（1—33）或(1—32)所表示的线性正交变换。一般情形下变换式就要复杂得多，例如极坐标和直角坐标间的变换式和反变换式为

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

及

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

显然，上面二式不具有线性正交变换的性质。

下面我们研究两个变换的例子：

1. 坐标微分的变换。由式（2—53）有

$$dx^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^3}dx^3$$

或

$$dx^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}dx^i \qquad (2-55)$$

由式（2—53）得到它的反变换式

$$dx^j=\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}dx^{i'} \qquad (2-56)$$

为方便，引入记号

$$\beta_j^{k'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \qquad (2-57)$$

$$\beta_{i'}^j=\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \qquad (2-58)$$

并称为变换系数，其中$\beta_j^{k'}$称为逆变换系数，$\beta_{i'}^j$称为正变换系数。这样，式（2—55）、（2—56）可以写为

$$dx^{k'}=\beta_j^{k'}dx^j \qquad (2-55')$$

及

$$dx^j=\beta_{i'}^j dx^{i'} \qquad (2-56')$$

2．梯度分量的变换。标量函数φ的梯度是向量 grad φ，其分量为$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial z}$。现对任一坐标$x^1$，$x^2$，$x^3$定义三个分量$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}$。下面考察这些量如何通过坐标变换式(2—52）而变换。

根据复合函数求导数规则有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x^{i'}}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

若令

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{i'}}=a_{i'}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}=a_j$$

并利用式（2—58），则得

$$a_{i'}=\beta_{i'}^j a_j \qquad (2-59)$$

类似的得到它的反变换，为

$$a_j=\beta_j^{k'}a_{k'} \qquad (2-60)$$

式（2—55′）和（2—59）或（2—56′）和（2—60）表

示了两个物理量——坐标微分和梯度分量的正变换或逆变换，它们都是通过坐标的正变换系数 $\beta_{i}^{i'}$ 或逆变换系数 $\beta_{i'}^{i}$ 来实现的。这种变换具有一般性，将在下面几节讨论。

通过上面的分析知道，如果确定了变换系数，就可以确定物理量在坐标变换中的变换规律。变换系数可由式（2—57）和（2—58）求得。用矩阵语言可以把它们表示为

$$\begin{pmatrix} \beta_{1}^{1'} & \beta_{2}^{1'} & \beta_{3}^{1'} \\ \beta_{1}^{2'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{3}^{2'} \\ \beta_{1}^{3'} & \beta_{2}^{3'} & \beta_{3}^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{2}} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{3}} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{2}} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{3}} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^{2}} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^{3}} \end{pmatrix} \tag{2—57'}$$

及

$$\begin{pmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{2'}^{1} & \beta_{3'}^{1} \\ \beta_{1'}^{2} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{3'}^{2} \\ \beta_{1'}^{3} & \beta_{2'}^{3} & \beta_{3'}^{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1}}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^{1}}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^{1}}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^{2}}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^{2}}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^{2}}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^{3}}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^{3}}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^{3}}{\partial x^{3'}} \end{pmatrix} \tag{2—58'}$$

很容易证明正变换系数矩阵与逆变换系数矩阵之间的互逆关系。事实上，坐标 x^{j} 是 $x^{k'}$ 的函数，$x^{k'}$ 又是 x^{i} 的函数，根据求导数的链式法则有

$$\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} = \delta_{i}^{j}$$

由式（5—57）、（2—58），有

$$\beta_{k'}^{j} \beta_{i}^{k'} = \delta_{i}^{j} \tag{2—61}$$

类似地有

$$\beta_{j}^{k'} \beta_{i'}^{j} = \delta_{i'}^{k'} \tag{2—62}$$

上面二式也可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \beta^{1}_{1'} & \beta^{1}_{2'} & \beta^{1}_{3'} \\ \beta^{2}_{1'} & \beta^{2}_{2'} & \beta^{2}_{3'} \\ \beta^{3}_{1'} & \beta^{3}_{2'} & \beta^{3}_{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{1'}_{1} & \beta^{1'}_{2} & \beta^{1'}_{3} \\ \beta^{2'}_{1} & \beta^{2'}_{2} & \beta^{2'}_{3} \\ \beta^{3'}_{1} & \beta^{3'}_{2} & \beta^{3'}_{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2—61'}$$

及

$$\begin{pmatrix} \beta^{1'}_{1} & \beta^{1'}_{2} & \beta^{1'}_{3} \\ \beta^{2'}_{1} & \beta^{2'}_{2} & \beta^{2'}_{3} \\ \beta^{3'}_{1} & \beta^{3'}_{2} & \beta^{3'}_{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{1}_{1'} & \beta^{1}_{2'} & \beta^{1}_{3'} \\ \beta^{2}_{1'} & \beta^{2}_{2'} & \beta^{2}_{3'} \\ \beta^{3}_{1'} & \beta^{3}_{2'} & \beta^{3}_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2—62'}$$

或

$$\begin{pmatrix} \beta^{1}_{1'} & \beta^{1}_{2'} & \beta^{1}_{3'} \\ \beta^{2}_{1'} & \beta^{2}_{2'} & \beta^{2}_{3'} \\ \beta^{3}_{1'} & \beta^{3}_{2'} & \beta^{3}_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{1'}_{1} & \beta^{1'}_{2} & \beta^{1'}_{3} \\ \beta^{2'}_{1} & \beta^{2'}_{2} & \beta^{2'}_{3} \\ \beta^{3'}_{1} & \beta^{3'}_{2} & \beta^{3'}_{3} \end{pmatrix}^{-1} \tag{2—63}$$

由于式（2—52）、（2—53）中反变换常常是困难的，所以求变换系数时往往只能应用式（2—57）和（2—58）中的一个，另一组需应用式（2—61）求出。

例题1 试确定各笛卡尔直角坐标系间的变换系数 $\beta^{i}_{i'}$，$\beta^{i'}_{j}$。

用现在的记号，式（1—32′）可以写为

$$x^{i'} = \alpha^{i'}_{j} x^{i} \tag{a'}$$

式中，$\alpha^{i'}_{j}$是新坐标轴在旧坐标系中的方向余弦。由式（2—57）和（2—58）有

$$\beta_j^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}=\alpha_j^{i'} \qquad (b')$$

及

$$\beta_{i'}^{j}=\alpha_{i'}^{j} \qquad (c')$$

亦即，在笛卡尔直角坐标系中变换系数就是各轴夹角的方向余弦。

对于二维情形有

$$x^{1'}=\cos\alpha x^1+\sin\alpha x^2$$

$$x^{2'}=-\sin\alpha x^1+\cos\alpha x^2 \qquad (d')$$

所以

$$\beta_1^{1'}=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}=\cos\alpha,\quad \beta_2^{1'}=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}=\sin\alpha$$

$$\beta_1^{2'}=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}=-\sin\alpha,\ \beta_2^{2'}=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}=\cos\alpha \qquad (e')$$

又因为

$$x^1=\cos\alpha x^{1'}-\sin\alpha x^{2'}$$

$$x^2=\sin\alpha x^{1'}+\cos\alpha\, x^{2'} \qquad (f')$$

所以

$$\beta_{1'}^{1}=\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}=\cos\alpha,\quad \beta_{2'}^{1}=\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}=-\sin\alpha$$

$$\beta_{1'}^{2}=\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}=\sin\alpha,\quad \beta_{2'}^{2}=\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}=\cos\alpha \qquad (g')$$

例题 2 求直角坐标系和柱坐标系的变换系数。

因为直角坐标 (x,y,z) 与柱坐标 (r,θ,z) 间的关系为

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z \qquad (a')$$

及

$$r^2=x^2+y^2,\quad \theta=\mathrm{arctg}\frac{y}{x},\quad z=z$$

置$x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$及$x^{1'}=r$，$x^{2'}=\theta$，$x^{3'}=z$，由式(2

—57）和（2—58）得

$$\beta^1_{1'}=\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}=\cos\theta，\quad \beta^1_{2'}=\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}=-r\sin\theta，$$

$$\beta^1_{3'}=\frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}=0$$

$$\beta^2_{1'}=\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}=\sin\theta，\quad \beta^2_{2'}=\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}=r\cos\theta，$$

$$\beta^2_{3'}=\frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}=0 \qquad (b')$$

$$\beta^3_{1'}=\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}=0，\quad \beta^3_{2'}=\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}=0，\quad \beta^3_{3'}=\frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}=1$$

及

$$\beta^{1'}_1=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}=\cos\theta，\quad \beta^{1'}_2=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}=\sin\theta，$$

$$\beta^{1'}_3=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}=0$$

$$\beta^{2'}_1=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}=-\frac{\sin\theta}{r}，\quad \beta^{2'}_2=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}=\frac{\cos\theta}{r}， \qquad (c')$$

$$\beta^{2'}_3=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}=0$$

$$\beta^{3'}_1=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}=0，\quad \beta^{3'}_2=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}=0，\quad \beta^{3'}_3=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}=1$$

例题 3　求平面笛卡尔斜角坐标和笛卡尔直角坐标间的变换系数。（图 2—8）。

引用记号 $x^1=x$，$x^2=y$，$x^{1'}=\xi$，$x^{2'}=\eta$，由图有

$$x^1=x^{1'}+x^{2'}\cos\alpha，\quad x^2=x^{2'}\sin\alpha \qquad (a')$$

并由此求得

$$x^{1'}=x^1-x^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}，\quad x^{2'}=\frac{x^2}{\sin\alpha} \qquad (b')$$

于是，可根据式（2—57）、（2—58）求出

$$\beta^{1}_{1'}=\frac{\partial x^{1}}{\partial x^{1'}}=1,\quad \beta^{1}_{2'}=\frac{\partial x^{1}}{\partial x^{2'}}=\cos\alpha$$

$$\beta^{2}_{1'}=\frac{\partial x^{2}}{\partial x^{1'}}=0,\quad \beta^{2}_{2'}=\frac{\partial x^{2}}{\partial x^{2'}}=\sin\alpha \qquad (c')$$

及

$$\beta^{1'}_{1}=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{1}}=1,\quad \beta^{1'}_{2}=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{2}}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\beta^{2'}_{1}=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{1}}=0,\quad \beta^{2'}_{2}=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{2}}=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad (d')$$

例题 4 试确定连接直角坐标与球坐标的变换系数。（图 2—10）。

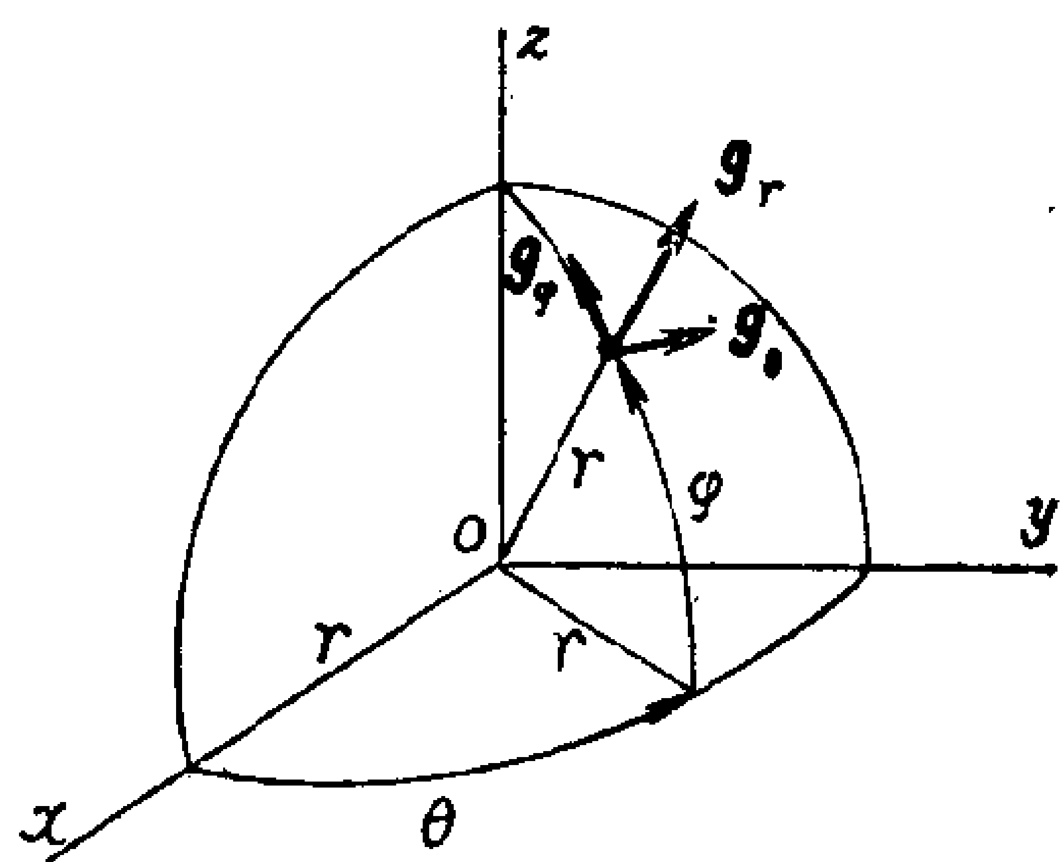


图 2—10

设直角坐标为$x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$，球坐标为$x^{1'}=r$，$x^{2'}=\theta$，$x^{3'}=\varphi$。坐标变换式和反变换式为

$$x=r\cos\varphi\cos\theta,\quad y=r\cos\varphi\sin\theta,\quad z=r\sin\varphi \qquad (a')$$

及

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}},\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{z}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (b')$$

由式（2—57）、（2—58）求得

$$\beta^{1}_{1'}=\cos\theta\cos\varphi,\qquad \beta^{1}_{2'}=-r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\beta^{1}_{3'}=-r\cos\theta\sin\varphi$$

$$\beta^{2}_{1'}=\sin\theta\cos\varphi,\quad \beta^{2}_{2'}=r\cos\theta\cos\varphi,\quad \beta^{2}_{3'}=-r\sin\theta\sin\varphi$$

$$(c')$$

$$\beta^{3}_{1'}=\sin\varphi,\quad \beta^{3}_{2'}=0,\quad \beta^{3}_{3'}=r\cos\varphi$$

及

$$\beta^{1'}_{1}=\frac{x}{r}=\cos\theta\cos\varphi,\ \beta^{1'}_{2}=\frac{y}{r}=\sin\theta\cos\varphi,\ \beta^{1'}_{3}=\frac{z}{r}=\sin\varphi$$

$$\beta^{2'}_{1}=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\theta}{r\cos\varphi},\ \beta^{2'}_{2}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\theta}{r\cos\varphi},$$

$$\beta^{2'}_{3}=0 \tag{d'}$$

$$\beta^{3'}_{1}=-\frac{zx}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r},$$

$$\beta^{3'}_{2}=-\frac{zy}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\sin\theta\sin\varphi}{r}$$

$$\beta^{3'}_{3}=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

二、基向量的变换

设在旧坐标系中的协变基向量和逆变基向量分别为 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$，在新坐标系中为 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$，现确定坐标变换时基向量的变换关系。只要协变基向量间的关系确定了，逆变基向量间的变换关系也就确定了，因为逆变基向量是由式（2—47）定义的。

按式（2—45）、（2—46），位置向量的微分 $d\boldsymbol{r}$ 在旧、新坐标系可以分别表为

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_j dx^j$$

和

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_{i'}dx^{i'} \tag{2—64}$$

且

$$\boldsymbol{g}_j=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}$$

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}} \tag{2—65}$$

由式（2—64）和（2—56′）有

$$\boldsymbol{g}_{i'}dx^{i'}=\boldsymbol{g}_j dx^j=\boldsymbol{g}_j\,\beta^j_{i'}\,dx^{i'} \qquad (2-66)$$

对比系数可得

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\beta^j_{i'}\boldsymbol{g}_j \qquad (2-67)$$

必须注意，由式（2—66）得到式（2—67）不是在等式两边简单的消去 $dx^{i'}$，而是对比相同坐标微分的系数。为简单也可以把式（2—66）应用于若干特殊情形，如分别选择 $dx^{2'}=dx^{3'}=0$，$dx^{3'}=dx^{1'}=0$，$dx^{1'}=dx^{2'}=0$ 得到 $\boldsymbol{g}_{1'}=\beta^j_{1'}\boldsymbol{g}_j$, $\boldsymbol{g}_{2'}=\beta^j_{2'}\boldsymbol{g}_j$，$\boldsymbol{g}_{3'}=\beta^j_{3'}\boldsymbol{g}_j$，综合为式（2—67）。

类似地推导可以得到

$$\boldsymbol{g}_k=\beta^{i'}_k\boldsymbol{g}_{i'} \qquad (2-68)$$

由协变基向量的变换式及式（2—62）、（2—63），可以得到逆变基向量的变换关系。对新、旧坐标系同时应用式（2—47),有

$$\boldsymbol{g}_{j'}\cdot\boldsymbol{g}^{i'}=\delta^{i'}_{j'}$$

$$\boldsymbol{g}_j\cdot\boldsymbol{g}^i=\delta^i_j \qquad (2-69)$$

若已知

$$\boldsymbol{g}_{j'}=\beta^k_{j'}\boldsymbol{g}_k$$

并设

$$\boldsymbol{g}^{i'}=\alpha^{i'}_j\boldsymbol{g}^j \qquad (2-70)$$

式中 $\alpha^{i'}_j$ 为待求。将上二式代入式（2—69）之第一式，得

$$\beta^k_{j'}\,\alpha^{i'}_l\,\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}^l=\beta^k_{j'}\,\alpha^{i'}_l\,\delta^l_k=\beta^k_{j'}\,\alpha^{i'}_k=\delta^{i'}_{j'}$$

在上式最后等号的两边同乘 $\beta^{j'}_j$，得

$$\beta^{j'}_j\,\beta^k_{j'}\,\alpha^{i'}_k=\beta^{j'}_j\,\delta^{i'}_{j'}$$

继续运算，左边 $=\delta^k_j\alpha^{i'}_k=\alpha^{i'}_j$，右边 $=\beta^{i'}_j$，所以

$$\alpha^{i'}_j=\beta^{i'}_j$$

于是，式（2—70）变为

$$g^{i'} = \beta^{i'}_{j} g^{j} \qquad (2-71)$$

类似地推导得到

$$g^{k} = \beta^{k}_{i'}\ g^{i'} \qquad (2-72)$$

由式（2—67）、（2—68）、（2—71）、（2—72）得出结论，协变基向量的正变换是通过正变换系数实现的，逆变基向量的正变换是通过逆变换系数实现的；逆变换则正好相反。

概括上面所得到的公式有

$$
\begin{aligned}
g_{i'} &= \beta^{j}_{i'} g_{j} \\
g_{k} &= \beta^{i'}_{k} g_{i'} \\
g^{i'} &= \beta^{i'}_{j} g^{j} \\
g^{k} &= \beta^{k}_{i'}\ g^{i'}
\end{aligned}
\qquad (2-73)
$$

如用我们熟悉的矩阵语言，上诸式可以写为

$$
\begin{pmatrix} g_{1'} \\ g_{2'} \\ g_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{1}_{1'} & \beta^{2}_{1'} & \beta^{3}_{1'} \\ \beta^{1}_{2'} & \beta^{2}_{2'} & \beta^{3}_{2'} \\ \beta^{1}_{3'} & \beta^{2}_{3'} & \beta^{3}_{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1} \\ g_{2} \\ g_{3} \end{pmatrix} \qquad (2-67')
$$

$$
\begin{pmatrix} g_{1} \\ g_{2} \\ g_{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{1'}_{1} & \beta^{2'}_{1} & \beta^{3'}_{1} \\ \beta^{1'}_{2} & \beta^{2'}_{2} & \beta^{3'}_{2} \\ \beta^{1'}_{3} & \beta^{2'}_{3} & \beta^{3'}_{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1'} \\ g_{2'} \\ g_{3'} \end{pmatrix} \qquad (2-68')
$$

$$
\begin{pmatrix} g^{1'} \\ g^{2'} \\ g^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{1'}_{1} & \beta^{1'}_{2} & \beta^{1'}_{3} \\ \beta^{2'}_{1} & \beta^{2'}_{2} & \beta^{2'}_{3} \\ \beta^{3'}_{1} & \beta^{3'}_{2} & \beta^{3'}_{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{1} \\ g^{2} \\ g^{3} \end{pmatrix} \qquad (2-71')
$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{g}^1 \\ \boldsymbol{g}^2 \\ \boldsymbol{g}^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^1_{1'} & \beta^1_{2'} & \beta^1_{3'} \\ \beta^2_{1'} & \beta^2_{2'} & \beta^2_{3'} \\ \beta^3_{1'} & \beta^3_{2'} & \beta^3_{3'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{g}^{1'} \\ \boldsymbol{g}^{2'} \\ \boldsymbol{g}^{3'} \end{Bmatrix} \qquad (2-72')$$

如置

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \beta^1_{1'} & \beta^2_{1'} & \beta^3_{1'} \\ \beta^1_{2'} & \beta^2_{2'} & \beta^3_{2'} \\ \beta^1_{3'} & \beta^2_{3'} & \beta^3_{3'} \end{bmatrix} \qquad (2-74)$$

则上面各式可写为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{g}_{i'} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{g}_i \\ &\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{g}_{i'} \\ &\boldsymbol{g}^{i'} = [\boldsymbol{B}^{-1}]^T\boldsymbol{g}^i \\ &\boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{g}^{i'} \end{aligned} \qquad (2-73')$$

将式（2—73）与（2—55′）、（2—56′）、（2—59）、（2—60）对比看出，协变基向量的变换与梯度分量的变换一致，逆变基向量的变换与坐标微分的变换一致。

根据前面的分析，如果知道了某坐标系中的基向量和该坐标系（旧坐标系）与另一坐标系（新坐标系）的变换系数，就可求出新坐标系的基向量。在下面的例题中，均把笛卡尔直角坐标系作为旧坐标系。

例题 5　求柱坐标中的协变基向量和逆变基向量。

利用例题 2 已经求得的变换系数，由式（2—67）和（2—71）直接求得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_r &= \boldsymbol{g}_{1'} = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{g}_\theta &= \boldsymbol{g}_{2'} = -r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_1 + r\cos\theta\,\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{g}_z &= \boldsymbol{g}_{3'} = \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \qquad (a')$$

及

$$g^r=g^{1'}=\cos\theta\,\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2$$

$$g^\theta=g^{2'}=-\frac{\sin\theta}{r}\boldsymbol{e}_1+\frac{\cos\theta}{r}\boldsymbol{e}_2 \qquad (b')$$

$$g^z=g^{3'}=\boldsymbol{e}_3$$

例题 6 求平面斜角坐标系的协变和逆变基向量。

利用例题 3 已经求得的变换系数，由式（2—67）和（2—71）求得

$$\boldsymbol{g}_\xi=\boldsymbol{g}_{1'}=\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{g}_\eta=\boldsymbol{g}_{2'}=\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_1+\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_2 \qquad (a')$$

及

$$g^\xi=g^{1'}=\boldsymbol{e}_1-\operatorname{ctg}\alpha\,\boldsymbol{e}_2$$

$$g^\eta=g^{2'}=\frac{1}{\sin\alpha}\boldsymbol{e}_2 \qquad (b')$$

例题 7 求球坐标的协变和逆变基向量。

根据式（2—67）、（2—71）和例题 4 已求得的变换系数极易求出

$$\boldsymbol{g}_r=\boldsymbol{g}_{1'}=\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2+\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{g}_\theta=\boldsymbol{g}_{2'}=-r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1+r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2 \qquad (a')$$

$$\boldsymbol{g}_\varphi=\boldsymbol{g}_{3'}=-r\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1-r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2+r\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_3$$

及

$$g^r=g^{1'}=\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2+\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_3$$

$$g^\theta=g^{2'}=-\frac{\sin\theta}{r\cos\varphi}\boldsymbol{e}_1+\frac{\cos\theta}{r\cos\varphi}\boldsymbol{e}_2 \qquad (b')$$

$$g^\varphi=g^{3'}=\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2+\frac{\cos\theta}{r}\boldsymbol{e}_3$$

三、向量的变换

在第二节，已把任意向量$\boldsymbol{v}$在任何坐标系中用它的逆变分量或协变分量由协变基向量或逆变基向量表示。现在研究坐标变换时逆变向量和协变向量的变换规律。

向量$\boldsymbol{v}$在新、旧坐标系中可表为

$$\boldsymbol{v}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}=v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}=v^{i}\boldsymbol{g}_{i}=v_{i}\boldsymbol{g}^{i} \qquad (2-75)$$

1. 已知v_i求$v_{i'}$。由式（2—75）和（2—72）有

$$\boldsymbol{v}=v_j\boldsymbol{g}^j=v_j\beta^j_{k'}\boldsymbol{g}^{k'}=v_{k'}\boldsymbol{g}^{k'}$$

在上式最后等号两边点乘$\boldsymbol{g}_{i'}$，左边等于

$$v_j\beta^j_{k'}\boldsymbol{g}^{k'}\cdot\boldsymbol{g}_{i'}=v_j\beta^j_{k'}\delta^{k'}_{i'}=v_j\beta^j_{i'}$$

右边等于

$$v_{k'}\boldsymbol{g}^{k'}\cdot\boldsymbol{g}_{i'}=v_{k'}\delta^{k'}_{i'}=v_{i'}$$

于是得到

$$v_{i'}=\beta^j_{i'}v_j \qquad (2-76)$$

2. 已知$v_{i'}$求v_i。

以$\beta^{i'}_k$乘等式（2—76）两边，得

$$\beta^{i'}_k v_{i'}=\beta^{i'}_k\beta^j_{i'}v_j=\delta^j_k v_j=v_k$$

或

$$v_k=\beta^{i'}_k v_{i'} \qquad (2-77)$$

3. 已知v^i求$v^{i'}$，或者相反。与上边类似的推导可得

$$v^{i'}=\beta^{i'}_j v^j \qquad (2-78)$$

及

$$v^k=\beta^k_{i'}v^{i'} \qquad (2-79)$$

综合式（2—76）～（2—79），为

$$\begin{aligned}
v_{i'}&=\beta^j_{i'}v_j\\
v_k&=\beta^{i'}_k v_{i'}\\
v^{i'}&=\beta^{i'}_j v^j\\
v^k&=\beta^k_{i'}v^{i'}
\end{aligned} \qquad (2-80)$$

将式（2—80）与（2—73）对照我们发现，在坐标变换

中，向量的分量与同名的基向量服从同样的变换规律。亦即任何一个具有下标量的正变换（由旧参照标架变换到新参照标架），必须乘以 $\beta^{i}_{i'}$（正变换系数），反变换则必须乘以 $\beta^{i'}_{k}$（逆变换系数）；任何一个具有上标量的正变换必须乘以 $\beta^{i'}_{j}$（逆变换系数），反变换则必须乘以 $\beta^{k}_{i'}$（正变换系数）。如果把协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$ 作为比较的标准，把所有按同样变换方式的量称为协变量，按相反方式变换的量称为逆变量。这样，所有带下标的量都是协变量，所有带上标的量都是逆变量。这也就是第一节我们把 v_i 称为协变向量(或向量的协变分量)，把 v^i 称为逆变向量（或向量的逆变分量）的原因。

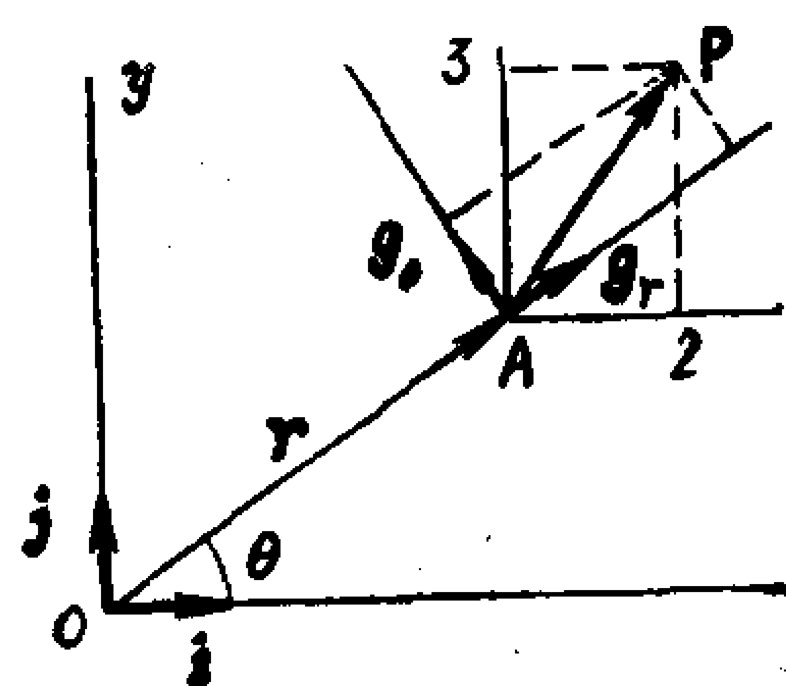


图 2—11

例题 8　在 A 点作用力 $\boldsymbol{P}$，用直角坐标表示为 $\boldsymbol{P}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，试求在极坐标系中 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量。（图 2—11）。

取 $P^x=P^1=2$，$P^y=P^2=3$，$P^r=P^{1'}$，$P^\theta=P^{2'}$，由例题 2 已求得 $\beta^{1'}_1=\cos\theta$，$\beta^{1'}_2=\sin\theta$，$\beta^{2'}_1=-\dfrac{\sin\theta}{r}$，$\beta^{2'}_2=\dfrac{\cos\theta}{r}$。于是，可由式（2—78）求得

$$P^r=P^1\beta^{1'}_1+P^2\beta^{1'}_2=2\cos\theta+3\sin\theta$$

$$P^\theta=P^1\beta^{2'}_1+P^2\beta^{2'}_2=-\frac{2\sin\theta}{r}+\frac{3\cos\theta}{r}$$

由此看到，在极坐标中，同一向量 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量与位置(r，θ）有关，P^θ 已不再具有力的量纲。

例题 9　已知某位移在直角坐标系中表为 $\boldsymbol{u}=3x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}$，试在极坐标系中用协变基向量表示向量 $\boldsymbol{u}$。

取 $u^1=3x=3r\cos\theta$，$u^2=4y=4r\sin\theta$，已知 $\beta^{1'}_1=\cos\theta$，$\beta^{1'}_2=\sin\theta$、$\beta^{2'}_1=-\dfrac{\sin\theta}{r}$、$\beta^{2'}_2=\dfrac{\cos\theta}{r}$。因此，极坐标中的逆变分量为

$$u^r = u^1 \beta_1^{1'} + u^2 \beta_2^{1'} = 3r\cos^2\theta + 4r\sin^2\theta = r(3+\sin^2\theta)$$

$$u^\theta = u^1 \beta_1^{2'} + u^2 \beta_2^{2'} = -3\sin\theta\cos\theta + 4\sin\theta\cos\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta$$

于是

$$\boldsymbol{u} = r(3+\sin^2\theta)\boldsymbol{g}_r + \sin\theta\cos\theta\,\boldsymbol{g}_\theta$$

第四节　张量的普遍定义

一、向量的解析定义，最简单的张量

在向量代数里曾把向量定义为必须由大小和方向才能确定的物理量或几何量；当把向量放在笛卡尔直角坐标系里研究时，曾把向量定义为在各坐标轴上投影的集合。现在从坐标变换出发，给向量一个新的解析定义如下：

在三维空间进行坐标变换时，协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$（或逆变基向量$\boldsymbol{g}^i$）按关系式

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \beta_{i'}^{j}\boldsymbol{g}_j \quad (\text{或 } \boldsymbol{g}^{i'} = \beta_j^{i'}\boldsymbol{g}^j)$$

变换，这时，如果由三个分量所构成的物理量或几何量 v_i（或 v^i）（$i=1,2,3$）按同样方式，即

$$v_{i'} = \beta_{i'}^{j} v_j \quad (\text{或 } v^{i'} = \beta_j^{i'} v^j)$$

变换，则这些物理量或几何量的集合v_i就称为协变向量或向量的协变分量，简称向量v_i（集合v^i就称为逆变向量或向量的逆变分量，简称向量v^i）。

实际上，如果将指标$i=1,2,\cdots,n$，上述定义完全可以推广到 n 维空间。

仔细分析上述定义可以看到：

① 若向量在某一坐标系中已被确定，那么它在其它坐标系中的分量就可以求出，只要知道变换系数即可；

② 向量分量的变换公式是线性且齐次的，因此，在某一坐标系中等于零的向量在所有坐标系中都等于零；

③ 由式（2—76）、（2—78）、（2—75）看出，这里所定义的向量就是把向量按照某种基向量的分解，这种分解是按向量运算法则进行的，因此向量的解析定义等价于向量的几何定义。

为什么给向量重新下个定义呢？因为从解析的观点或坐标变换的观点看，还存在许多物理量或几何量具有和向量类似的性质。于是，很容易把向量的定义推广来定义这些量，从而得到张量的概念，张量就是在坐标变换中服从统一规律的量。这样，我们又可以把向量称为一阶张量，因为它具有一个上标或下标；而把标量称为零阶张量，因为它没有指标，在任何坐标系都是同样的值。标量和向量是最简单的张量。

二、二阶张量的定义

在三维空间中，组成参照标架的协变基向量和逆变基向量按式

$$\mathbf{g}_{i'}=\beta^{i}_{i'}\mathbf{g}_{i}$$

和

$$\mathbf{g}^{i'}=\beta^{i'}_{i}\mathbf{g}^{i}$$

变换，这时

1. 若在原坐标系中的九个分量T^{ij}按式

$$T^{i'j'}=\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}T^{ij} \qquad (2—81)$$

变换，则这九个分量的集合定义一个二阶逆变张量；

2. 若在原坐标系中的九个分量T_{ij}按式

$$T_{i'j'}=\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}T_{ij} \qquad (2—82)$$

变换，则这九个分量的集合定义一个二阶协变张量；

3. 若在原坐标系中的九个分量$T^{i}_{\cdot j}$及$T_{i}^{\cdot j}$按式

$$T^{i'}_{\cdot j'}=\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}T^{i}_{\cdot j} \qquad (2—83)$$

及

$$T_{i'}^{\cdot j'}=\beta^{i}_{i'}\beta^{j'}_{j}T_{i}^{\cdot j} \qquad (2—84)$$

变换，则九个分量$T^{i}_{\cdot j}$或$T_{j}^{\cdot i}$的集合定义一个二阶混变张量。必须注意，一般$T^{i}_{\cdot j} \neq T_{j}^{\cdot i}$，因此应当区别那一个指标在前，那一个指标在后，小圆点表示一个空位。至于张量的协变分量和逆变分量的关系，将在下一章研究。

三、高阶张量的普遍定义

假设我们的讨论仍限于三维空间，仿照二阶张量的定义可以定义高阶张量如下：

在三维空间中，构成参照标架的协变基向量和逆变基向量按式

$$\mathbf{g}_{i'} = \beta^{i}_{i'} \mathbf{g}_{i}$$

和

$$\mathbf{g}^{i'} = \beta^{i'}_{i} \mathbf{g}^{i}$$

变换，这时，若在该空间有$N = 3^r$个分量$\underbrace{T^{ij}_{\cdot\cdot kl\cdots}}_{r\text{个指标}}$（数系或函数系）所确定的物理量或几何量，按式

$$\underbrace{T^{i'j'}_{\cdot\ \cdot\ k'l'\cdots}}_{r\text{个}} = \underbrace{\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}\beta^{k}_{k'}\beta^{l}_{l'}\cdots}_{r\text{个}} \underbrace{T^{ij}_{\cdot\cdot kl\cdots}}_{r\text{个}} \qquad (2-85)$$

变换，则这些物理量或几何量的集合称为r阶张量。r是上标与下标的总个数，如全是上标称为r阶逆变张量，如全是下标称为r阶协变张量，同时具有上标和下标，则相应的称为某阶逆变某阶协变的混变张量。

上面从坐标变换的角度定义了张量。与第一章笛卡尔张量类似，我们还可以给出张量的第二个定义。

设a_i，b^k，…，c^n为r个任意向量的分量，如果$N = 3^r$个分量$T^{i}_{\cdot k\cdots n}$能将它们构成标量

$$\varphi = \underbrace{T^{i}_{\cdot k\cdots n}}_{r\text{个}} a_i b^k \cdots c^n \qquad (2-86)$$

则这N个分量$T^{i}_{\cdot k\cdots n}$的集合定义一个r阶张量。

现在我们证明张量的两种定义是一致的。

根据标量在各种坐标系中不变的性质，在新、旧坐标系中有关系式

$$\varphi = T^{i'}_{\cdot\, k'\cdots n'} a_{i'} b^{k'} \cdots c^{n'} = T^{i}_{\cdot\, k\cdots n} a_i b^k \cdots c^n \tag{2—87}$$

由向量分量的变换公式（2—80），上式可以写为

$$T^{i'}_{\cdot\, k'\cdots n'} a_{i'} b^{k'} \cdots c^{n'}$$

$$= T^{i}_{\cdot\, k\cdots n} \beta^{i'}_{i} \beta^{k}_{k'} \cdots \beta^{n}_{n'} a_{i'} b^{k'} \cdots c^{n'}$$

该式对任何向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$都应满足，因此有

$$T^{i'}_{\cdot\, k'\cdots n'} = \beta^{i'}_{i} \beta^{k}_{k'} \cdots \beta^{n}_{n'} T^{i}_{\cdot\, k\cdots n} \tag{2—88}$$

式（2—88）与式（2—85）的定义是完全相同的。

特别要注意上面消去因子的办法。由于是求和，所以不能简单的消去，应该是对比系数，或对特殊向量诸个满足，如选择$a_{1'} \neq 0, b^{1'} \neq 0, \cdots, c^{1'} \neq 0$，而其余分量均为零，这时两边只剩下含$a_{1'} b^{1'} \cdots c^{1'}$的项，可以消去，如此等等即可得到式（2—88）。

在第一章笛卡尔张量中，我们引进了并矢和张量的不变性记法，这些概念也可以在普遍张量理论中引用。

向量并矢的定义和性质类似于第一章的讨论（参见第一章第三节）。只是在表示上这里必须分逆变和协变。例如，并矢$\boldsymbol{ab}$可以写成为

$$\boldsymbol{ab} = (a^i \boldsymbol{g}_i)(b^j \boldsymbol{g}_j) = a^i b^j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \tag{2—89}$$

也可以写为

$$\boldsymbol{ab} = a_i b_j \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j = a_i b^j \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j = a^i b_j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^j \tag{2—90}$$

首先，我们证明并矢$\boldsymbol{ab}$是二阶张量，$a^i b^j$是它的逆变分量。在新坐标系中

$$\boldsymbol{ab} = a^{i'} b^{j'} \boldsymbol{g}_{i'} \boldsymbol{g}_{j'} = (\beta^{i'}_{i} a^i)(\beta^{j'}_{j} b^j)(\beta^{k}_{i'} \boldsymbol{g}_k)(\beta^{l}_{j'} \boldsymbol{g}_l)$$

$$= \delta^{k}_{i} \delta^{l}_{j} a^i b^j \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_l = a^i b^j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j$$

所以$\boldsymbol{ab}$在不同坐标系中具有不变的形式。因此有

$$a^{i'}b^{j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}=a^ib^j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=a^ib^j\beta_i^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}\beta_j^{j'}\boldsymbol{g}_{j'}$$

或

$$a^{i'}b^{j'}=\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}a^ib^j$$

这就证明了a^ib^j是张量$\boldsymbol{ab}$的逆变分量。类似地可以证明a_ib_j、a^ib_j（或a_ib^j）是$\boldsymbol{ab}$的协变分量和混变分量。

必须注意，一般$\boldsymbol{ab}\neq\boldsymbol{ba}$，$a_ib^j=c_i^{\cdot j}\neq c_{\cdot i}^j=a^jb_i$。

上面两个向量并矢的概念很容易推广到多个向量的并矢上去。一般地有

$$\boldsymbol{a}\cdots\boldsymbol{bc}\cdots\boldsymbol{d}=a^i\cdots b^jc_k\cdots d_n\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^n \qquad (2-91)$$

式中，$\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^n$是基向量的并矢。

如果把一个r阶张量记为T，$T^{\overbrace{i\cdots jk\cdots n}^{}}$（$r$个），$T_{i\cdots jk\cdots n}$（$r$个），$T^{i\cdots j}_{\cdot\cdot\;k\cdots n}$（$r$个）……分别是它的逆变分量、协变分量和各混变分量，则T可以记为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=T^{i\cdots jk\cdots n}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k\cdots\boldsymbol{g}_n\\&=T_{i\cdots jk\cdots n}\boldsymbol{g}^i\cdots\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^n\\&=T^{i\cdots j}_{\cdot\cdot\;k\cdots n}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^n\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \qquad (2-92)$$

该式就是张量的不变性记法，很容易证明它不依赖于坐标系的选择。我们也可以把式（2—92）作为张量的第三定义，它与前两个定义也是完全一样的。以其中的第一式为例，因为在新坐标系中有

$$T^{i'\cdots j'k'\cdots n'}\boldsymbol{g}_{i'}\cdots\boldsymbol{g}_{j'}\boldsymbol{g}_{k'}\cdots\boldsymbol{g}_{n'}=T^{i\cdots jk\cdots n}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k\cdots\boldsymbol{g}_n$$

$$=T^{i\cdots jk\cdots n}\beta_i^{i'}\cdots\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}\cdots\beta_n^{n'}\boldsymbol{g}_{i'}\cdots\boldsymbol{g}_{j'}\cdots\boldsymbol{g}_{k'}\cdots\boldsymbol{g}_{n'}$$

于是得到

$$T^{i'\cdots j'k'\cdots n'}=\beta_i^{i'}\cdots\beta_j^{j'}\cdots\beta_k^{k'}\cdots\beta_n^{n'}T^{i\cdots jk\cdots n}$$

这就是张量的第一个定义。今后将同时应用式（2—85）、（2—86）、（2—92）来判别张量和推导公式。

四、商　法　则

假如有$N=3^r$个函数$a^{\overbrace{i\cdots j}^{r个}}{}_{k\cdots n}$，要判断它能否构成$r$阶张量，可直接应用前面所讲的几个定义，但这并不总是方便的，有时还可以应用一种间接的检验法——商法则更为方便。商法则的一般叙述如下：

如果$\underbrace{a^{i\cdots j}{}_{k\cdots n}}_{r个}$与任意一个张量的乘积*）是一个非零张量，则$\underbrace{a^{i\cdots j}{}_{k\cdots n}}_{r个}$一定是一个$r$阶张量。例如，若已知$c^k$是逆变向量，$b_{ij}$是二阶协变张量，$a^{ijk}$能使下式成立：

$$c^k=a^{ijk}b_{ij} \qquad (2—93)$$

则c^{ijk}一定是一个三阶逆变张量。下面就此式给以证明。在新坐标系中有

$$c^{k'}=a^{i'j'k'}b_{i'j'} \qquad (a)$$

而

$$c^k=\beta^k_{k'}c^{k'}=\beta^k_{l'}c^{l'} \qquad (b)$$

$$b_{ij}=\beta^{i'}_i\,\beta^{j'}_j\,b_{i'j'} \qquad (c)$$

将式（b）、（c）代入式（2—93），得

$$\beta^k_{l'}c^{l'}=a^{ijk}\beta^{i'}_i\,\beta^{j'}_j\,b_{i'j'} \qquad (d)$$

在式两边同乘$\beta^{k'}_k$，得

$$c^{k'}=a^{ijk}\beta^{i'}_i\,\beta^{j'}_j\,\beta^{k'}_k\,b_{i'j'} \qquad (e)$$

对比式（a）、（e），有

$$a^{i'j'k'}=\beta^{i'}_i\,\beta^{j'}_j\,\beta^{k'}_k\,a^{ijk}$$

这就证明了a^{ijk}是一个三阶逆变张量。

---

*）张量乘法见第四章。

例题 1　试证明弹性体内一点的应力状态是二阶张量。

由弹性力学知道，描述一点的应力状态有九个应力分量，现用逆变分量表示，记为σ^{ij}，表示九个函数，我们证明这九个函数的集合构成二阶张量。根据弹性力学的斜截面应力公式（它是由微元四面体的平衡条件得到的），若用n_i表示斜截面法向量$\boldsymbol{n}$的方向余弦，用X^i表示斜截面上应力向量$\boldsymbol{X}$在各坐标轴方向的分量（图 2—12），则有

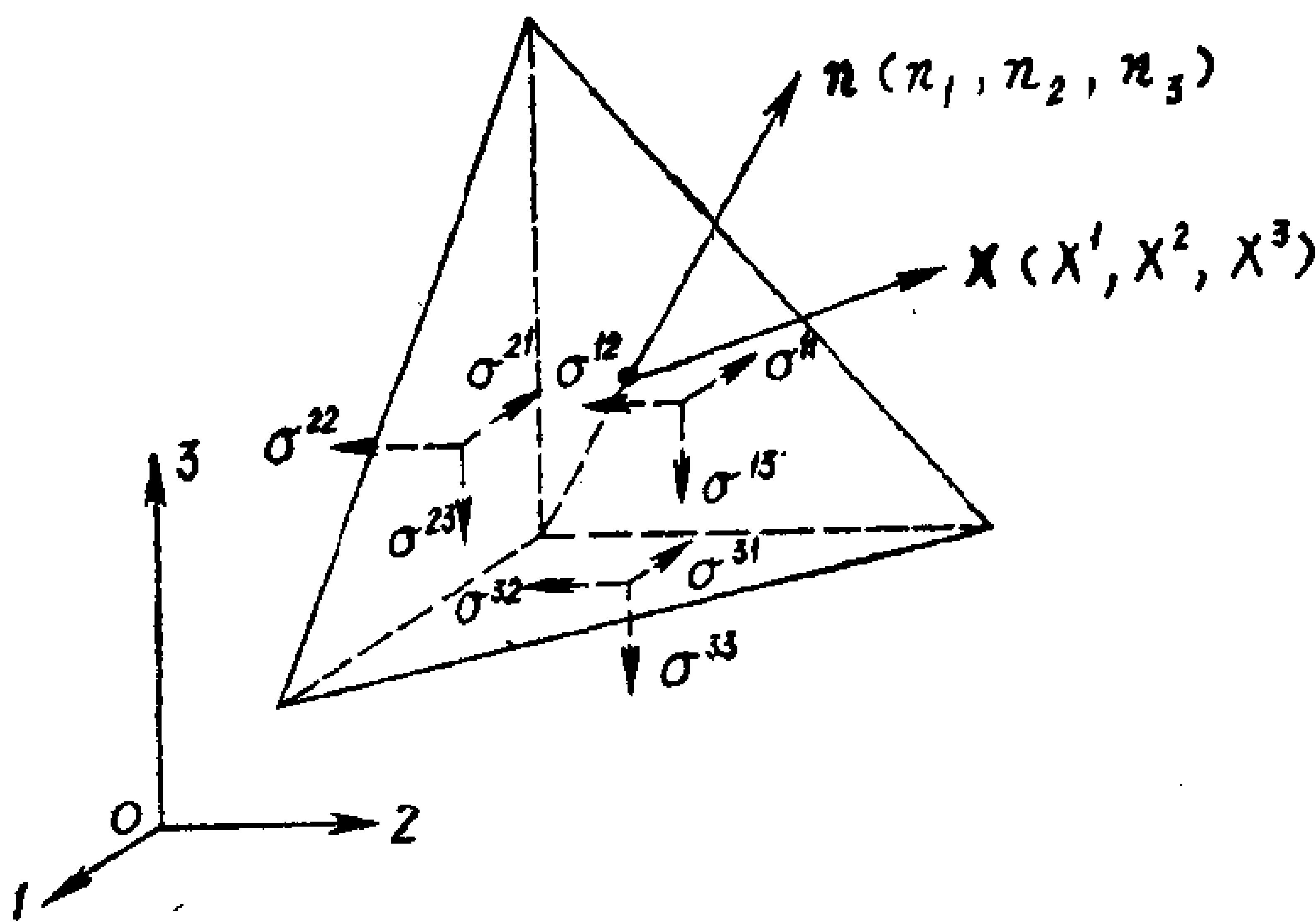


图　2—12

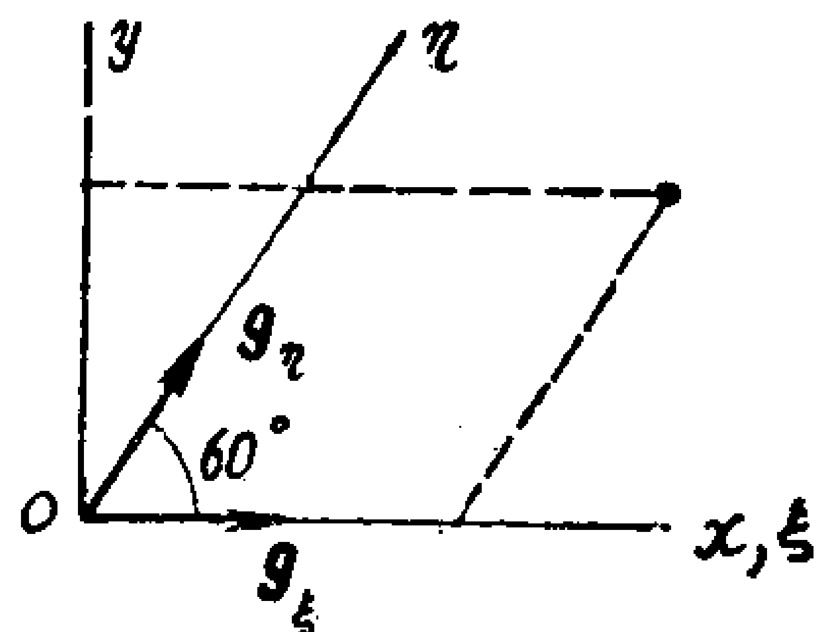


图　2—13

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{21} & \sigma^{31} \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{32} \\ \sigma^{13} & \sigma^{23} & \sigma^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \qquad (a')$$

或写为

$$X^j = \sigma^{ij} n_i \qquad (b')$$

这就是用张量记法表示的斜截面应力公式。我们已知n_i，X^j都是向量，根据商法则σ^{ij}一定是一个二阶逆变张量。

例题 2　已知弹性平面问题，在直角坐标系中某点的应力分量为：$\sigma_x=500, \sigma_y=200, \tau_{xy}=\tau_{yx}=100$，试求斜角坐标系（$\alpha=60°$）中的逆变、协变和混变应力分量（图 2—13）。

在笛卡尔直角坐标系是不分逆变和协变量的或者说它们是相等的。

由第三节例题3已求得变换系数为

$$\beta_{1'}^{1}=1,\quad \beta_{2'}^{1}=\cos\alpha,\quad \beta_{1'}^{2}=0,\quad \beta_{2'}^{2}=\sin\alpha$$

$$\beta_{1}^{1'}=1,\quad \beta_{2}^{1'}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \beta_{1}^{2'}=0,\quad \beta_{2}^{2'}=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad (a')$$

如把直角坐标系作为旧坐标系，斜角坐标系作为新坐标系，根据张量定义有

$$\sigma^{\xi\xi}=\sigma^{1'1'}=\beta_{i}^{1'}\beta_{j}^{1'}\sigma^{ij}=\beta_{1}^{1'}\beta_{1}^{1'}\sigma^{11}+\beta_{1}^{1'}\beta_{2}^{1'}\sigma^{12}+\beta_{2}^{1'}\beta_{1}^{1'}\sigma^{21}+\beta_{2}^{1'}\beta_{2}^{1'}\sigma^{22}$$

$$\sigma^{\eta\eta}=\sigma^{2'2'}=\beta_{i}^{2'}\beta_{j}^{2'}\sigma^{ij}=\beta_{1}^{2'}\beta_{1}^{2'}\sigma^{11}+\beta_{1}^{2'}\beta_{2}^{2'}\sigma^{12}+\beta_{2}^{2'}\beta_{1}^{2'}\sigma^{21}+\beta_{2}^{2'}\beta_{2}^{2'}\sigma^{22}$$

$$\sigma^{\xi\eta}=\sigma^{1'2'}=\beta_{i}^{1'}\beta_{j}^{2'}\sigma^{ij}=\beta_{1}^{1'}\beta_{1}^{2'}\sigma^{11}+\beta_{1}^{1'}\beta_{2}^{2'}\sigma^{12}+\beta_{2}^{1'}\beta_{1}^{2'}\sigma^{21}+\beta_{2}^{1'}\beta_{2}^{2'}\sigma^{22}$$

$$\sigma^{\eta\xi}=\sigma^{2'1'}=\beta_{i}^{2'}\beta_{j}^{1'}\sigma^{ij}=\beta_{1}^{2'}\beta_{1}^{1'}\sigma^{11}+\beta_{1}^{2'}\beta_{2}^{1'}\sigma^{12}+\beta_{2}^{2'}\beta_{1}^{1'}\sigma^{21}+\beta_{2}^{2'}\beta_{2}^{1'}\sigma^{22}$$

将式（a'）的后四式代入上式，并使$\sigma^{11}=\sigma_x$，$\sigma^{22}=\sigma_y$ $\sigma^{12}=\tau_{xy}$，$\sigma^{21}=\tau_{yx}$，得到

$$\sigma^{\xi\xi}=\sigma_x+\mathrm{ctg}^2\alpha\sigma_y-\mathrm{ctg}\alpha\tau_{xy}-\mathrm{ctg}\alpha\tau_{yx}$$

$$\sigma^{\eta\eta}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\sigma_y$$

$$\sigma^{\xi\eta}=-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\sigma_y+\frac{1}{\sin\alpha}\tau_{xy} \qquad (b')$$

$$\sigma^{\eta\xi}=-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\sigma_y+\frac{1}{\sin\alpha}\tau_{yx}$$

类似地推导可以得到

$$\sigma_{\xi\xi}=\sigma_x$$

$$\sigma_{\eta\eta}=\cos^2\alpha\sigma_x+\sin^2\alpha\sigma_y+\sin\alpha\cos\alpha\tau_{xy}+\sin\alpha\cos\alpha\tau_{yx} \qquad (c')$$

$$\sigma_{\xi\eta}=\cos\alpha\sigma_x+\sin\alpha\tau_{xy}$$
$$\sigma_{\eta\xi}=\cos\alpha\sigma_x+\sin\alpha\tau_{yx}$$

以及

$$\sigma^{\xi}_{\cdot\xi}=\sigma_x-\mathrm{ctg}\alpha\tau_{yx}$$
$$\sigma^{\eta}_{\cdot\eta}=\sigma_y+\mathrm{ctg}\alpha\tau_{yx}$$
$$\sigma^{\xi}_{\cdot\eta}=\cos\alpha\sigma_x-\cos\alpha\sigma_y+\sin\alpha\tau_{xy}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\tau_{yx}\qquad(d')$$
$$\sigma^{\eta}_{\cdot\xi}=\frac{1}{\sin\alpha}\tau_{yx}$$

和

$$\sigma_{\xi}^{\cdot\xi}=\sigma_x-\mathrm{ctg}\alpha\tau_{xy}$$
$$\sigma_{\eta}^{\cdot\eta}=\sigma_y+\mathrm{ctg}\alpha\tau_{xy}$$
$$\sigma_{\xi}^{\cdot\eta}=\frac{1}{\sin\alpha}\tau_{xy}\qquad(e')$$
$$\sigma_{\eta}^{\cdot\xi}=\cos\alpha\sigma_x-\cos\alpha\sigma_y-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\tau_{xy}+\sin\alpha\tau_{yx}.$$

代入具体数值，最后得到

$$\sigma^{\xi\xi}=451.21,\sigma^{\eta\eta}=266.67,\sigma^{\xi\eta}=-17.86,\sigma^{\eta\xi}=-17.86$$
$$\sigma_{\xi\xi}=500,\quad\sigma_{\eta\eta}=2353.27,\quad\sigma_{\xi\eta}=336.6,\quad\sigma_{\eta\xi}=336.6$$
$$\sigma^{\xi}_{\cdot\xi}=442.26,\sigma^{\eta}_{\cdot\eta}=557.74,\sigma^{\xi}_{\cdot\eta}=207.73,\sigma^{\eta}_{\cdot\xi}=115.47$$
$$\sigma_{\xi}^{\cdot\xi}=442.26,\sigma_{\eta}^{\cdot\eta}=557.74,\sigma_{\xi}^{\cdot\eta}=115.47,\sigma_{\eta}^{\cdot\xi}=207.73$$

从该例所得公式和数字计算可见，直线坐标系由直角改为斜角会带来许多麻烦，但是通过张量分析来建立这些关系还是方便的。

对比式（d'）、（e'），由于$\tau_{xy}=\tau_{yx}$有$\sigma^{i}_{\cdot j}=\sigma_{j}^{\cdot i}$，统一记为$\sigma^i_j$，但是$\sigma^i_j\neq\sigma^j_i$。

上述各应力分量的图示如图 2—14。看出，应力分量的方向总是与某一个基向量的方向一致，而不一定是截面的法向应力或切向应力。从图（b）、（c）看出，尽管$\sigma^{i}_{\cdot j}=\sigma_{j}^{\cdot i}=\sigma^i_j$，但是$\sigma^{i}_{\cdot j}$与$\sigma_{j}^{\cdot i}$的含义是不同的。

还应当指出，这里所求出的是应力的“张量分量”，工程上

应用的是“物理分量”，这部分内容详见第四章第五节。

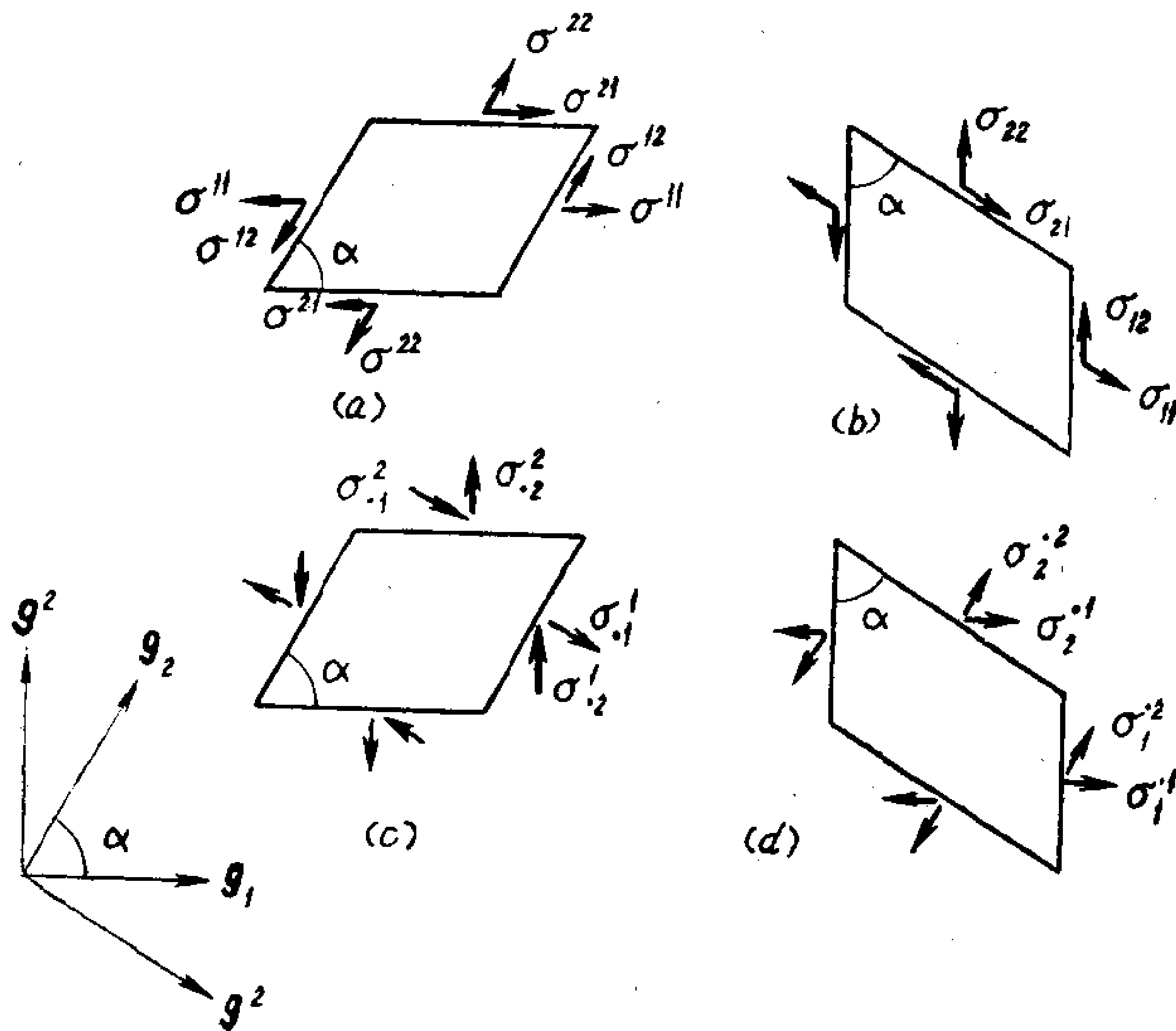


图 2—14

例题 3 已知平面直角坐标系中的应力分量σ_x，σ_y，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，试求极坐标系中应力张量的逆变、协变和混变分量。

在本章第三节例题 2 已求得变换系数为

$$\beta^{1'}_{1}=\cos\theta,\ \beta^{1'}_{2}=\sin\theta,\ \beta^{2'}_{1}=-\frac{\sin\theta}{r},\quad \beta^{2'}_{2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\beta^{1}_{1'}=\cos\theta,\quad \beta^{1}_{2'}=-r\sin\theta,\ \beta^{2}_{1'}=\sin\theta,\quad \beta^{2}_{2'}=r\cos\theta \tag{a'}$$

于是，根据张量的坐标变换求得：

逆变分量

$$\sigma^{rr}=\sigma^{1'1'}=\cos^2\theta\sigma_x+\sin^2\theta\sigma_y+\sin\theta\cos\theta\tau_{xy}$$
$$+\sin\theta\cos\theta\tau_{yx}$$

$$\sigma^{\theta\theta}=\sigma^{2'2'}=\frac{\sin^2\theta}{r^2}\sigma_x+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\sigma_y-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\tau_{xy}$$
$$-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\tau_{yx}$$

$$\sigma^{r\theta}=\sigma^{1'2'}=-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\sigma_x+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\sigma_y$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{r}\tau_{xy}-\frac{\sin^2\theta}{r}\tau_{yx} \qquad (b')$$

$$\sigma^{\theta r}=\sigma^{2'1'}=-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\sigma_x+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\sigma$$

$$-\frac{\sin^2\theta}{r}\tau_{xy}+\frac{\cos^2\theta}{r}\tau_{yx}$$

协变分量

$$\sigma_{rr}=\sigma_{1'1'}=\cos^2\theta\sigma_x+\sin^2\theta\sigma_y+\sin\theta\cos\theta\tau_{xy}$$
$$+\sin\theta\cos\theta\tau_{yx}$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{2'2'}=r^2\sin^2\theta\sigma_x+r^2\cos^2\theta\sigma_y-r^2\sin\theta\cos\theta\tau_{xy}$$
$$-r^2\sin\theta\cos\theta\tau_{yx}$$
$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{1'2'}=-r\sin\theta\cos\theta\sigma_x+r\sin\theta\cos\theta\sigma_y+r\cos^2\theta\tau_{xy}$$
$$-r\sin^2\theta\tau_{yx} \qquad (c')$$
$$\sigma_{\theta r}=\sigma_{2'1'}=-r\sin\theta\cos\theta\sigma_x+r\sin\theta\cos\theta\sigma_y-r\sin^2\theta\tau_{xy}$$
$$+r\cos^2\theta\tau_{yx}$$

混变分量

$$\sigma^{r}_{\cdot r}=\sigma^{1'}_{\cdot 1'}=\cos^2\theta\sigma_x+\sin^2\theta\sigma_y+\sin\theta\cos\theta\tau_{xy}$$
$$+\sin\theta\cos\theta\tau_{yx}$$
$$\sigma^{\theta}_{\cdot\theta}=\sigma^{2'}_{\cdot 2'}=\sin^2\theta\sigma_x+\cos^2\theta\sigma_y-\sin\theta\cos\theta\tau_{xy}$$
$$-\sin\theta\cos\theta\tau_{yx}$$
$$\sigma^{r}_{\cdot\theta}=\sigma^{1'}_{\cdot 2'}=-r\sin\theta\cos\theta\sigma_x+r\sin\theta\cos\theta\sigma_y+r\cos^2\theta\tau_{xy}$$
$$-r\sin^2\theta\tau_{yx} \qquad (d')$$
$$\sigma^{\theta}_{\cdot r}=\sigma^{2'}_{\cdot 1'}=-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\sigma_x+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\sigma_y$$
$$-\frac{\sin^2\theta}{r}\tau_{xy}+\frac{\cos^2\theta}{r}\tau_{yx}$$

及

$$\begin{aligned}
\sigma_{r}^{\cdot r}=\sigma_{1'}^{\cdot 1'} &= \cos^2\theta\,\sigma_x+\sin^2\theta\,\sigma_y+\sin\theta\cos\theta\,\tau_{xy} \\
&\quad +\sin\theta\cos\theta\,\tau_{yx} \\
\sigma_{\theta}^{\cdot \theta}=\sigma_{2'}^{\cdot 2'} &= \sin^2\theta\,\sigma_x+\cos^2\theta\,\sigma_y-\sin\theta\cos\theta\,\tau_{xy} \\
&\quad -\sin\theta\cos\theta\,\tau_{yx} \\
\sigma_{\theta}^{\cdot r}=\sigma_{2'}^{\cdot 1'} &= -r\sin\theta\cos\theta\,\sigma_x+r\sin\theta\cos\theta\,\sigma_y \\
&\quad -r\sin^2\theta\,\tau_{xy}+r\cos^2\theta\,\tau_{yx} \qquad (e') \\
\sigma_{r}^{\cdot \theta}=\sigma_{1'}^{\cdot 2'} &= -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\sigma_x+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\sigma_y \\
&\quad +\frac{\cos^2\theta}{r}\tau_{xy}-\frac{\sin^2\theta}{r}\tau_{yx}
\end{aligned}$$

在结束本章的时候，我们再重复一次前面和第一章笛卡尔张量中已经指出的对普遍张量仍然有效的事实：

1． 如果在某坐标系中张量的所有分量为零（或称为零张量），则该张量在所有容许变换的坐标系中全部分量为零；

2． 如果在某坐标系中将物理上的方程式写成张量方程的形式，则它在所有容许变换的坐标系中成立。

上面这两点在张量分析中是非常重要的。

第三章　几个基本的或常用的张量

第一节　度量张量

在有了张量的概念之后，我们再回过头来进一步研究协变基向量和逆变基向量以及它们的关系，并引出最基本的、最重要的张量——度量张量。

一、度 量 张 量

由式（2—47），即

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j$$

确定了逆变基向量和协变基向量间的关系。

如果把每个基向量都用同名的三个基向量表示，这很简单，用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 \\ \boldsymbol{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 \\ \boldsymbol{g}_3 \end{bmatrix} \qquad (3-1)$$

及

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1 \\ \boldsymbol{g}^2 \\ \boldsymbol{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1 \\ \boldsymbol{g}^2 \\ \boldsymbol{g}^3 \end{bmatrix} \qquad (3-2)$$

用张量记法表为

$$\boldsymbol{g}_i = \delta_i^j \boldsymbol{g}_j \qquad (3-1')$$

及

$$\boldsymbol{g}^i = \delta_j^i \boldsymbol{g}^j \qquad (3-2')$$

上二式说明，协变基向量的逆变分量和逆变基向量的协变分量

都是单位张量。

如果把每个基向量都看成是由异名基向量所组成的参照标架中的一个特殊向量，则可以表示为

$$\boldsymbol{g}_i = g_{ij}\boldsymbol{g}^j \qquad (3-3)$$

及

$$\boldsymbol{g}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j \qquad (3-4)$$

式中，g_{ij}是协变基向量$\boldsymbol{g}_i$的协变分量，g^{ij}是逆变基向量$\boldsymbol{g}^i$的逆变分量。

g_{ij}和g^{ij}称为度量张量，前者称为度量张量的协变分量或协变度量张量，后者称为度量张量的逆变分量或逆变度量张量。"度量"一词的含义将在后面提到，这里我们首先证明它的张量性质。设在新坐标系中，基向量

$$\boldsymbol{g}_{i'} = g_{i'j'}\boldsymbol{g}^{j'}$$

又

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \beta^i_{i'}\boldsymbol{g}_i = \beta^i_{i'}g_{ij}\boldsymbol{g}^j$$
$$= \beta^i_{i'}g_{ij}\beta^j_{j'}\boldsymbol{g}^{j'} = \beta^i_{i'}\beta^j_{j'}g_{ij}\boldsymbol{g}^{j'}$$

对比上面二式，得

$$g_{i'j'} = \beta^i_{i'}\beta^j_{j'}g_{ij} \qquad (3-5)$$

同理有

$$g^{i'j'} = \beta^{i'}_i\beta^{j'}_j g^{ij} \qquad (3-6)$$

这就证明了g_{ij}，g^{ij}是二阶张量。式（3－3），（3－4）可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_1\\ \boldsymbol{g}_2\\ \boldsymbol{g}_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}^1\\ \boldsymbol{g}^2\\ \boldsymbol{g}^3\end{pmatrix} \qquad (3-3')$$

及

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}^1\\ \boldsymbol{g}^2\\ \boldsymbol{g}^3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}g^{11} & g^{12} & g^{13}\\ g^{21} & g^{22} & g^{23}\\ g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_1\\ \boldsymbol{g}_2\\ \boldsymbol{g}_3\end{pmatrix} \qquad (3-4')$$

根据向量分量的性质，由式（3－1），（3－2）看出，度量张量的混变分量就是单位张量，即

$$g^{i}_{j}=\delta^{i}_{j} \qquad (3-7)$$

$$g_{i}^{j}=\delta_{i}^{j} \qquad (3-8)$$

二、度量张量的性质和作用

在张量计算中，度量张量具有非常重要的性质和作用，这将在后面随处看到，这里先提及最基本的几点。

1. 度量张量的各分量等于同名基向量的点积。

注意到式（3－3），（3－4）及（2－47），有

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=g_{ik}\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}_j=g_{ik}\delta^k_j=g_{ij} \qquad (3-9)$$

及

$$\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j=g^{ik}\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}^j=g^{ik}\delta^j_k=g^{ij} \qquad (3-10)$$

也常把式（3－9），（3－10)作为度量张量的定义，并由此证明式（3－3），（3－4）。

2. 度量张量是二阶对称张量。

g_{ij}和g^{ij}的张量性质前面已经证明，这里证明它们的对称性。

因为$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=\boldsymbol{g}_j\cdot\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j=\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}^i$以及式（3－9），（3－10），直接得到

$$g_{ij}=g_{ji} \qquad (3-11)$$

及

$$g^{ij}=g^{ji} \qquad (3-12)$$

3. 度量张量的协变分量和逆变分量相乘并按一对指标求和等于单位张量。即

$$g_{ik}g^{jk}=\delta^j_i \qquad (3-13)$$

证明：由式（3－3）和（3－4）有

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=g_{ik}\boldsymbol{g}^k g^{jl}\boldsymbol{g}_l=g_{ik}g^{jl}\delta^k_l=g_{ik}g^{jk}$$

又式$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta^j_i$，代入上式即得到式（3－13）。

式（3－13）代表九个方程式，可以写为

$$g_{i1}g^{j1}+g_{i2}g^{j2}+g_{i3}g^{j3}=\delta^j_i \qquad (3-13')$$

或写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（3 —13″）

根据式（3 —13），可由度量张量的协变分量求出逆变分量，或者反过来求解。对于固定的一组 j，使 $i=1$，2，3就可确定一组g^{j1}，g^{j2}，g^{j3}，它们可由下列代数方程组求出：

$$\begin{aligned} g_{11}g^{j1}+g_{12}g^{j2}+g_{13}g^{j3}&=\delta_1^j \\ g_{21}g^{j1}+g_{22}g^{j2}+g_{23}g^{j3}&=\delta_2^j \\ g_{31}g^{j1}+g_{32}g^{j2}+g_{33}g^{j3}&=\delta_3^j \end{aligned} \qquad (3-14)$$

当 $j=1$，2，3就得到三组三阶代数方程式。

4. 度量张量是坐标微分二次型的系数。

设坐标的微分为dx^i，由式（2 —44），空间线元向量$d\mathbf{s}=\mathbf{g}_i dx^i$，于是

$$d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}=\mathbf{g}_i dx^i\cdot\mathbf{g}_j dx^j=g_{ij}dx^i dx^j \qquad (3-15)$$

由该式看出，g_{ij}是微分二次型的系数，通过它把线元的真实长度 $(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s})^{\frac{1}{2}}$跟坐标的微分$dx^i$联系起来，从而建立起这些坐标的空间度量，这也是把$g_{ij}$称为“度量”张量的缘由。后面我们还会看到，它还与空间两向量的夹角、面元和体元有直接关系。所以度量张量是确定空间几何的一个最基本的度量量。

5. 度量张量确定空间两向量的夹角。

设空间二向量为

$$\boldsymbol{u}=u^i\mathbf{g}_i \qquad (a)$$

$$\boldsymbol{v}=v_k\mathbf{g}^k=g_{kj}v^j\mathbf{g}^k \qquad (b)$$

则此二向量的点积为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|u|\cdot|v|\cos\theta \qquad (c)$$

式中，θ是向量$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$的夹角。另一方面，向量的点积也可以用其分量表示，为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=g_{kj}u^i v^j\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^k$$

$$=g_{kj}u^iv^j\delta_i^k$$

$$=g_{ij}u^iv^j \tag{d}$$

比较式（c），（d）得

$$\cos\theta=\frac{g_{ij}u^iv^j}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|} \tag{3—16}$$

由式（c），有

$$|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=u^k\boldsymbol{g}_k\cdot u^l\boldsymbol{g}_l=u^ku^lg_{kl}$$

所以

$$|\boldsymbol{u}|=(g_{kl}u^ku^l)^{\frac{1}{2}} \tag{e}$$

同理

$$|\boldsymbol{v}|=(g_{mn}v^mv^n)^{\frac{1}{2}} \tag{f}$$

将式（e）和（f）代入式（3—16）得

$$\cos\theta=\frac{g_{ij}u^iv^j}{(g_{kl}u^ku^l)^{\frac{1}{2}}(g_{mn}v^mv^n)^{\frac{1}{2}}} \tag{3—16′}$$

6. 度量张量确定向量的逆变分量和协变分量的关系。

由式（3—3），（3—4），度量张量联系了协变基向量和逆变基向量。

对于任一向量$\boldsymbol{u}$有

$$\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{g}_i \tag{g}$$

又有

$$\boldsymbol{u}=u_j\boldsymbol{g}^j=u_jg^{ij}\boldsymbol{g}_i \tag{h}$$

比较式（g），（h），并用$\boldsymbol{g}^k$点乘等式两边，得

$$u^i\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^k=u_jg^{ij}\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^k$$

对等式两边同时进行运算，得

$$u^i\delta_i^k=u_jg^{ij}\delta_i^k$$

$$u^k=g^{kj}u_j \tag{3—17}$$

同理

$$u_k=g_{kj}u^j \tag{3—18}$$

最后，对于二阶或高阶张量也有类似于式（3—17），（3—18）的关系。

设

$$c_{ij}=a_ib_j \tag{i}$$

$$c_{i}^{\cdot j}=a_{i}b^{j} \qquad (j)$$

$$c^{ij}=a^{i}b^{j} \qquad (k)$$

则有

$$c_{ij}=a_{i}b^{k}g_{kj}=a^{l}g_{li}b^{k}g_{kj}$$

利用式（i）～（k），得

$$c_{ij}=c_{i}^{\cdot k}g_{kj}$$

$$c_{ij}=g_{li}g_{kj}c^{lk}$$

同理

$$c_{\cdot j}^{i}=g_{kj}c^{ik}$$

$$c_{j}^{\cdot i}=g_{jk}c^{ki}$$

因为$g_{kj}=g_{jk}$，所以若$c^{ik}=c^{ki}$则$c_{\cdot j}^{i}=c_{j}^{\cdot i}$，否则$c_{\cdot j}^{i}\neq c_{j}^{\cdot i}$。

从运算的角度看，g_{ij}起着下降张量某个指标的作用，g^{ij}起着上升张量某个指标的作用。这将在第四章继续研究。

7. 度量张量的混变分量是单位张量。

这一事实已经在式（3—7）和（3—8）中指出。这里我们从另外一个角度得到它。如把式（3—13)的左边理解为g_{ik}对g^{jk}后一指标的下降或g^{jk}对g_{ik}第二个指标的上升，则有

$$g_{ik}g^{jk}=g_{\cdot i}^{j} \qquad (l)$$

及

$$g_{ik}g^{jk}=g_{i}^{\cdot j} \qquad (m)$$

显然有

$$g_{\cdot i}^{j}=g_{i}^{\cdot j}$$

令其为g_{i}^{j}，且将式（l），（m）与式（3—13）对比，得

$$g_{i}^{j}=g_{\cdot i}^{j}=g_{i}^{\cdot j}=\delta_{i}^{j} \qquad (3—19)$$

特别需要指出该式在任何参照标架中都成立。

8. 在正交坐标系中度量张量的性质。

在正交坐标系中，组成参照标架的基向量相互垂直，因此由式（3—9），（3—10）即可得到

$$g_{ij}=0 \quad (i\neq j) \qquad (3—20)$$

及

$$g^{ij}=0 \quad (i\neq j) \qquad (3—21)$$

特别是在笛卡尔直角坐标系，显然有

$$\left.\begin{aligned} &g_{ii}=1,\ g^{ii}=1,\ g_{i}^{i}=1\ (\text{不求和}) \\ &g_{ij}=0,\ g^{ij}=0,\ g_{i}^{j}=0\ (i\neq j) \end{aligned}\right\} \qquad (3—22)$$

或

$$[g_{ij}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ [g^{ij}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad(3-22')$$

等等。

9． 在欧几里德空间里，度量张量g_{ij}是正定的。

由高等代数知道，在欧几里德空间二次型总可以通过适当变换变为标准的平方和形式。因此，式（3—15）的微分二次型总可以转换为笛卡尔直角坐标系的形式，这时度量张量g_{ij}的各分量为式（3—22′）的第一式，它显然附合正定性条件。所以，在欧几里德空间度量张量g_{ij}是正定对称的二阶张量。

10． 度量张量g_{ij}的行列式及其坐标变换。

设度量张量g_{ij}的行列式值为g，则

$$g=|g_{ij}|=\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{vmatrix}\qquad(3-23)$$

由式（3—13），以及"矩阵之积的行列式等于每个因子矩阵行列式之积"的定理，有

$$|g_{ij}g^{ik}|=|g_{ij}|\cdot|g^{ik}|=g\,|g^{ik}|=1$$

因此

$$|g^{ij}|=\frac{1}{g}\qquad(3-24)$$

我们知道，当从一个参照标架变换到另一个时，有

$$g_{i'j'}=\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}g_{ij}$$

由此可得

$$g'=|g_{i'j'}|=|\beta^{i}_{i'}|\ |\beta^{j}_{j'}|\ |g_{ij}|\qquad(n)$$

如引用

$$|\beta^{i}_{i'}|=\Delta\qquad(o)$$

根据式（2—62′）有

$$|\beta_i^{i'}|=\frac{1}{\Delta} \tag{p}$$

由式（o），式（n）变为

$$g'=\Delta\Delta g \tag{3—25}$$

该式指出，尽管g是标量函数，但是它在两个参照标架中的值是不同的，这样的标量称为伪标量。

现在假设新坐标系为笛卡尔直角坐标系，由式（3—22′）有

$$g'=|g_{i'j'}|=1 \tag{3—23′}$$

这时，由式（3—25）得

$$\sqrt{g}=\frac{1}{\Delta} \tag{3—26}$$

式中，Δ是某坐标系的协变分量变换到笛卡尔直角坐标系的变换系数矩阵行列式。

从式（3—26）可以看出，$g\neq 0$，这就保证了式（3—14）有解。

对于二维空间，可以把它视为三维空间的子空间，并把第三个坐标取为x^3，使协变基向量$\boldsymbol{g}_3$为垂直于$\boldsymbol{g}_1$和$\boldsymbol{g}_2$的单位向量，于是有$g_{33}=1$，$g_{31}=g_{13}=g_{32}=g_{23}=0$，因此，在二维空间中度量张量的行列式为

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \tag{3—27}$$

三、度量张量的确定

从上面的分析看到，度量张量是非常重要的，它取决于所选取的基向量或坐标系。我们必须掌握任意坐标系中度量张量的计算方法。由已知条件，可以根据定义或前面所提到的有关性质计算它们，例如可以利用基向量、坐标变换等；如果已经建立了线元微分二次型，也可以由此直接得出协变度量张量。

在许多情形下，我们知道了某种坐标与笛卡尔直角坐标的关系，这时可以较方便的求出这种坐标中的度量张量。假设笛卡尔直角坐标系为$ox_1x_2x_3$，任意坐标系中的坐标用x^1，x^2，x^3表示。于是有

$$x_m = x_m(x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{q}$$

假设函数单值且有连续导数。在笛卡尔直角坐标系中，任意点的位置向量可以写为

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{r}$$

由式（2—46）求得协变基向量，为

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial x_1}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_3$$

根据式（3—9）就可以把协变度量张量表示为

$$g_{ij} = \frac{\partial x_1}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x^j} + \frac{\partial x_2}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x^j} + \frac{\partial x_3}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial x^j}$$

或

$$g_{ij} = \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial x_m}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x^j} \tag{3—28}$$

对于正交坐标系，有

$$\left.\begin{aligned} g_{ij} &= 0\ (i \neq j) \\ g_{ii} &= \sum_{m=1}^{3}\left(\frac{\partial x_m}{\partial x^i}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{3—29}$$

如果求出了g_{ij}，就可以根据式（3—13）来求逆变分量g^{ij}。如用$G(i,\ j)$表示元素g_{ij}在g中的代数余子式，由初等代数求得

$$g^{ij} = G(i,\ j)/g \tag{3—30}$$

或

$$g^{ij} = \frac{1}{g}\ \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \tag{3—30′}$$

为应用方便，写出代数余子式的具体形式如下：

$$G(1,1)=\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23}\\ g_{32} & g_{33}\end{vmatrix},G(1,2)=-\begin{vmatrix} g_{21} & g_{23}\\ g_{31} & g_{33}\end{vmatrix},G(1,3)=\begin{vmatrix} g_{21} & g_{22}\\ g_{31} & g_{32}\end{vmatrix}$$

$$G(2,1)=-\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13}\\ g_{32} & g_{33}\end{vmatrix},G(2,2)=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13}\\ g_{31} & g_{33}\end{vmatrix},G(2,3)=-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{31} & g_{32}\end{vmatrix}$$

$$G(3,1)=\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13}\\ g_{22} & g_{23}\end{vmatrix},G(3,2)=-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13}\\ g_{21} & g_{23}\end{vmatrix},G(3,3)=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}$$

（3—31）

对于正交坐标系，由式（3—30），（3—31），并注意到式（3—21），有

$$g^{ij}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ \dfrac{1}{g_{ii}}, & (i=j)\end{cases} \qquad (3—32)$$

下面举例说明计算度量张量的方法。

例题1　求极坐标中度量张量的协变分量和逆变分量。

第二章第三节的例题5，已求得极坐标的协变基向量，为

$$\boldsymbol{g}_r=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2 \qquad (a')$$

$$\boldsymbol{g}_\theta=-r\sin\theta\boldsymbol{e}_1+r\cos\theta\boldsymbol{e}_2$$

于是，由式（3—9）求得

$$g_{rr}=\boldsymbol{g}_r\cdot\boldsymbol{g}_r=(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$g_{\theta\theta}=\boldsymbol{g}_\theta\cdot\boldsymbol{g}_\theta=r^2(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)^2=r^2 \qquad (b')$$

$$g_{r\theta}=g_{\theta r}=\boldsymbol{g}_r\cdot\boldsymbol{g}_\theta=(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)(-r\sin\theta\boldsymbol{e}_1+r\cos\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$=r(-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)=0$$

实际上，因为极坐标是正交坐标系，所以最后的等式可直接由式（3—20）得到。

如果已经求出了用极坐标表示的线元微分二次型

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2 \qquad (c')$$

则根据式（3—15）可直接得到式（b'）。

因为在笛卡尔直角坐标系中，度量张量的分量是已知的，为

$$g_{xx}=g_{11}=1\text{，}\quad g_{yy}=g_{22}=1$$

$$g_{xy}=g_{yx}=g_{12}=g_{21}=0 \qquad (d')$$

所以，也可以通过坐标变换求出度量张量在极坐标系中的分量。第二章第三节例题 2 已求得变换系数为

$$\beta^{1}_{1'}=\cos\theta,\quad \beta^{2}_{1'}=\sin\theta,\quad \beta^{1}_{2'}=-r\sin\theta,\quad \beta^{2}_{2'}=r\cos\theta \qquad (e')$$

于是，根据变换式

$$g_{i'j'}=\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}g_{ij}$$

求得

$$g_{rr}=g_{1'1'}=\beta^{1}_{1'}\beta^{1}_{1'}+\beta^{2}_{1'}\beta^{2}_{1'}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$g_{\theta\theta}=g_{2'2'}=\beta^{1}_{2'}\beta^{1}_{2'}+\beta^{2}_{2'}\beta^{2}_{2'}=r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=r^2$$

$$g_{r\theta}=g_{\theta r}=0$$

至于逆变分量，可以利用与上面相类似的方法求出。也可以根据式（3—30），（3—31）由已求得的协变分量来求。对于正交坐标系，可直接由式（3—32）求得

$$g^{rr}=\frac{1}{g_{rr}}=1$$

$$g^{\theta\theta}=\frac{1}{g_{\theta\theta}}=\frac{1}{r^2} \qquad (f')$$

$$g^{r\theta}=g^{\theta r}=0$$

用矩阵表示极坐标中的度量张量，为

$$[g_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{bmatrix} \qquad (g')$$

$$[g^{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2}\end{bmatrix} \qquad (h')$$

$$g=r^2 \qquad (i')$$

例题 2　试求球坐标中度量张量的协变分量和逆变分量。

首先求协变分量。第二章第三节例题 4 已求得变换系数为

$$\beta^1_{1'}=\cos\theta\cos\varphi,\quad \beta^1_{2'}=-r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\beta^1_{3'}=-r\cos\theta\sin\varphi$$

$$\beta^2_{1'}=\sin\theta\cos\varphi,\quad \beta^2_{2'}=r\cos\theta\cos\varphi,$$

$$\beta^2_{3'}=-r\sin\theta\sin\varphi \qquad (a')$$

$$\beta^3_{1'}=\sin\varphi,\quad \beta^3_{2'}=0\quad \beta^3_{3'}=r\cos\varphi$$

又已知笛卡尔直角坐标系的协变度量张量，如式（3—22）。于是，由变换式$g_{i'j'}=\beta^i_{i'}\beta^j_{j'}g_{ij}$求得

$$\begin{aligned}g_{rr}=g_{1'1'}&=\beta^1_{1'}\beta^1_{1'}+\beta^2_{1'}\beta^2_{1'}+\beta^3_{1'}\beta^3_{1'}\\&=\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{\theta\theta}=g_{2'2'}&=\beta^1_{2'}\beta^1_{2'}+\beta^2_{2'}\beta^2_{2'}+\beta^3_{2'}\beta^3_{2'}\\&=r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi=r^2\cos^2\varphi\end{aligned} \qquad (b')$$

$$\begin{aligned}g_{\varphi\varphi}=g_{3'3'}&=\beta^1_{3'}\beta^1_{3'}+\beta^2_{3'}\beta^2_{3'}+\beta^3_{3'}\beta^3_{3'}\\&=r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+r^2\cos^2\varphi=r^2\end{aligned}$$

$$g_{r\theta}=g_{\theta\varphi}=g_{r\varphi}=0$$

由于球坐标是正交坐标系，故可由式（3—32）求得逆变分量。其结果与协变分量一起用矩阵表为

$$[g_{ij}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2\cos^2\varphi&0\\0&0&r^2\end{bmatrix} \qquad (c')$$

$$[g^{ij}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}&0\\0&0&\dfrac{1}{r^2}\end{bmatrix} \qquad (d')$$

$$g=r^4\cos^2\varphi \qquad (e')$$

例题3 求平面斜角坐标系度量张量的协变分量和逆变分

量。

仍然从笛卡尔直角坐标系的度量张量开始，用坐标变换方法来求。第二章第三节例题 3 已求得变换系数：

$$\beta^{1}_{1'}=1,\quad \beta^{2}_{1'}=0,\quad \beta^{1}_{2'}=\cos\alpha,\quad \beta^{2}_{2'}=\sin\alpha \tag{a'}$$

应用变换公式$g_{i'j'}=\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}g_{ij}$求得

$$g_{\xi\xi}=g_{1'1'}=\beta^{1}_{1'}\beta^{1}_{1'}+\beta^{2}_{1'}\beta^{2}_{1'}=1$$

$$\begin{aligned} g_{\eta\eta}=g_{2'2'}&=\beta^{1}_{2'}\beta^{1}_{2'}+\beta^{2}_{2'}\beta^{2}_{2'}\\ &=\cos^{2}\alpha+\sin^{2}\alpha=1 \end{aligned}$$

$$g_{\xi\eta}=g_{1'2'}=\beta^{1}_{1'}\beta^{1}_{2'}+\beta^{2}_{1'}\beta^{2}_{2'}=\cos\alpha \tag{b'}$$

$$g_{\eta\xi}=g_{2'1'}=\beta^{1}_{2'}\beta^{1}_{1'}+\beta^{2}_{2'}\beta^{2}_{1'}=\cos\alpha$$

为了求逆变分量，首先求协变度量张量的行列式

$$g=\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}=1-\cos^{2}\alpha=\sin^{2}\alpha \tag{c'}$$

再由式（3—30），（3—31）即可求出逆变分量

$$g^{\xi\xi}=G(\xi,\xi)/g=\frac{1}{\sin^{2}\alpha}$$

$$g^{\eta\eta}=G(\eta,\eta)/g=\frac{1}{\sin^{2}\alpha}$$

$$g^{\xi\eta}=G(\xi,\eta)/g=-\frac{\cos\alpha}{\sin^{2}\alpha} \tag{d'}$$

$$g^{\eta\xi}=G(\eta,\xi)/g=-\frac{\cos\alpha}{\sin^{2}\alpha}$$

将所得结果用矩阵表示为

$$[g_{ij}]=\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{e'}$$

$$[g^{ij}]=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & -\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} & \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \end{bmatrix} \qquad (f')$$

第二节　置换张量

一、置换符号e_{ijk}不是张量

在第二章第一节我们曾利用式(2—9)定义了置换符号e_{ijk}、e^{ijk}，利用这些符号可以使某些公式的表示得以简化。但是，在那里我们并没有把它们与坐标系或坐标变换联系起来。或者说，不论在什么样坐标系里都被定义为式（2—9），这样的量如果是张量，在坐标变换后还应该满足式（2—9），否则就不是张量。现在我们考察e_{ijk}是否具有张量性质。为方便，假设e_{ijk}是某坐标系中的量，满足式（2—9),并把这一坐标系作为旧坐标系，而把笛卡尔直角坐标系作为新坐标系,置换符号用$e_{i'j'k'}$表示，这样，在原来的坐标系中该量为

$$e_{i'j'k'}\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}=e_{ijk}|\beta_i^{i'}|=\frac{1}{\Delta}e_{ijk} \qquad (a)$$

该式第二步由式（2—15）得到，第三步由本章第一节式（p）得到。

从式（a）看出，经过变换，该量在原来的坐标系已经不满足式（2—9）了，差一个因子$\frac{1}{\Delta}$，所以置换符号不是张量。

二、定义置换张量

因为置换符号不具有张量性质，所以应用起来不够方便，如果我们修改一下原来的定义，就可以得到具有张量性质的代数量。由式（a）并注意到式（3—26），有

$$e_{i'j'k'}\beta_i^{i'}\ \beta_j^{j'}\ \beta_k^{k'}=\sqrt{g}\,e_{ijk} \qquad (b)$$

于是，若设

$$\in_{ijk}=\sqrt{g}\,e_{ijk} \tag{3—33}$$

并定义

$$\in_{ijk}=\begin{cases}\sqrt{g}，若（i，j，k）为循环序列；\\ -\sqrt{g}，若（i，j，k）为逆循环序列；\\ 0，若（i，j，k）为非循环序列。\end{cases} \tag{3—34}$$

则$\in_{ijk}$是一个三阶张量。证明如下：

设笛卡尔直角坐标系为新坐标系，这时，由式（3—34）定义的量为$\in_{i'j'k'}$，且

$$\in_{i'j'k'}\overset{*}{=}e_{i'j'k'} \tag{3—35}$$

式中，$\overset{*}{=}$表示在特殊坐标系成立的等式。于是

$$\begin{aligned}\in_{i'j'k'}\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}&\overset{*}{=}e_{i'j'k'}\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}\\ &=\sqrt{g}\,e_{ijk}=\in_{ijk}\end{aligned} \tag{c}$$

这就证明了$\in_{ijk}$是一个三阶协变张量。

根据上一节我们知道，度量张量g^{ij}其有提升指标的作用，由此及$\in_{ijk}$我们来确定置换张量的逆变分量。置

$$\in^{lmn}=\in_{ijk}g^{il}g^{jm}g^{kn} \tag{3—36}$$

注意到式（3—33）、（2—15）、（3—24），上式变为

$$\begin{aligned}\in^{lmn}&=\sqrt{g}\,e_{ijk}g^{il}g^{jm}g^{kn}\\ &=\sqrt{g}\,|g^{pq}|\,e^{lmn}\\ &=\sqrt{g}\cdot\frac{1}{g}\cdot e^{lmn}\end{aligned}$$

所以

$$\in^{lmn}=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{lmn} \tag{3—37}$$

定义

$$\in^{lmn}=\begin{cases}1/\sqrt{g}，若（i，j，k）为循环序列；\\ -1/\sqrt{g}，若（i，j，k）为逆循环序列；\\ 0，若（i，j，k）为非循环序列。\end{cases} \tag{3—38}$$

三、置换张量的性质和应用举例

1．置换张量是关于任意一对指标的反对称张量。

根据式（3—34）、（3—38）的定义，对于张量 $\in_{ijk}$ 或 $\in^{lmn}$ 中非零分量的任意一对指标相互交换位置，其绝对值不变，而前边的正、负号变号，故为三阶的反对称张量。

2．置换张量的分量与坐标系的选择有关。

由式（3—34）、（3—38）看出，置换张量的分量取决于所在坐标系内度量张量的行列式。在笛卡尔直角坐标系中，由于 $g=1$，所以 $\in_{123}=\in_{231}=\in_{312}=1$，$\in_{321}=\in_{213}=\in_{132}=-1$，其余分量为零，亦即，笛卡尔直角坐标系中

$$\in_{ijk}\overset{*}{=}e_{ijk}$$

同理

$$\in^{ijk}\overset{*}{=}e^{ijk}$$

在极坐标系里，由第一节例题1知 $g=r^2$，所以

$$\in_{123}=\in_{231}=\in_{312}=r，\quad \in_{321}=\in_{213}=\in_{132}=-r$$

其余分量为零。而

$$\in^{123}=\in^{231}=\in^{312}=\frac{1}{r},$$

$$\in^{321}=\in^{213}=\in^{132}=-\frac{1}{r}$$

其余分量为零。

在球坐标中，由第一节例题2知

$$\sqrt{g}=r^2\cos\varphi$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}=\frac{1}{r^2\cos\varphi} \tag{d}$$

在平面斜角坐标中，由第一节例题3得

$$\sqrt{g}=\sin\alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}=\frac{1}{\sin\alpha} \tag{e}$$

由此可以组合成相应坐标系中置换张量的分量。从上边的几个例

子中，我们看到置换张量的分量在不同坐标系中具有不同的值，而且一般说来还是位置坐标的函数。

3． 关于$\in_{ijk}$，$\in^{ijk}$与δ^i_j的几个关系式。

根据式（2—2）的定义，有

$$\begin{vmatrix} \delta^1_1 & \delta^1_2 & \delta^1_3 \\ \delta^2_1 & \delta^2_2 & \delta^2_3 \\ \delta^3_1 & \delta^3_2 & \delta^3_3 \end{vmatrix} = 1 \qquad (f)$$

另外，由式（3—33）、（3—37），可得

$$e^{ijk}e_{lmn} = \in^{ijk}\in_{lmn} \qquad (3—39)$$

注意到式（2—17）、（2—18）和（f）的关系，有

$$\begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m & \delta^i_n \\ \delta^j_l & \delta^j_m & \delta^j_n \\ \delta^k_l & \delta^k_m & \delta^k_n \end{vmatrix} = |\delta^q_p|\, e^{ijk}e_{lmn} = \in^{ijk}\in_{lmn} \qquad (g)$$

展开该行列式得

$$\begin{aligned} \in^{ijk}\in_{lmn} = & \delta^i_l\delta^j_m\delta^k_n - \delta^i_l\delta^j_n\delta^k_m \\ & + \delta^i_n\delta^j_l\delta^k_m - \delta^i_n\delta^j_m\delta^k_l \\ & + \delta^i_m\delta^j_n\delta^k_l - \delta^i_m\delta^j_l\delta^k_n \end{aligned} \qquad (3—40)$$

由此，置 $i=l$，得

$$\begin{aligned} \in^{ijk}\in_{imn} = & \delta^i_i(\delta^j_m\delta^k_n - \delta^j_n\delta^k_m) \\ & + \delta^i_n(\delta^j_i\delta^k_m - \delta^j_m\delta^k_i) \\ & + \delta^i_m(\delta^j_n\delta^k_i - \delta^j_i\delta^k_n) \\ = & 3(\delta^j_m\delta^k_n - \delta^j_n\delta^k_m) \\ & + (\delta^j_n\delta^k_m - \delta^j_m\delta^k_n) \\ & + (\delta^j_n\delta^k_m - \delta^j_m\delta^k_n) \\ = & \delta^j_m\delta^k_n - \delta^j_n\delta^k_m \end{aligned} \qquad (3—41)$$

在式（3—41）中置 $j=m$，得

$$\begin{aligned} \in^{ijk}\in_{ijn} & = \delta^j_j\delta^k_n - \delta^j_n\delta^k_j \\ & = 3\delta^k_n - \delta^k_n \\ & = 2\delta^k_n \end{aligned} \qquad (3—42)$$

再在式（3—42）中置$k=n$，得

$$\in^{ijk}\in_{ijk}=2\delta_k^k=6 \tag{3—43}$$

对于二维情形，首先引入二维的置换张量$\in_{\alpha\beta}$，使

$$\in_{ij3}=\in_{\alpha\beta3}=\in_{\alpha\beta} \tag{3—44}$$

因此，二维置换张量被定义为

$$\begin{aligned}&\in_{11}=\in_{22}=0\\&\in_{12}=-\in_{21}=\sqrt{g}\end{aligned} \tag{3—45}$$

逆变分量

$$\in^{ij3}=\in^{\alpha\beta3}=\in^{\alpha\beta} \tag{3—46}$$

被定义为

$$\begin{aligned}&\in^{11}=\in^{22}=0\\&\in^{12}=-\in^{21}=-\frac{1}{\sqrt{g}}\end{aligned} \tag{3—47}$$

其中，g是二维情形度量张量协变分量行列式，由式（3—27）表示。

在二维情形，类似于式（g），有

$$\begin{vmatrix}\delta_\gamma^\alpha & \delta_\delta^\alpha\\ \delta_\gamma^\beta & \delta_\delta^\beta\end{vmatrix}=\in^{\alpha\beta}\in_{\gamma\delta} \tag{h}$$

展开得

$$\in^{\alpha\beta}\in_{\gamma\delta}=\delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta-\delta_\delta^\alpha\delta_\gamma^\beta \tag{3—48}$$

而

$$\in^{\alpha\beta}\in_{\alpha\delta}=\delta_\delta^\beta \tag{3—49}$$

$$\in^{\alpha\beta}\in_{\alpha\beta}=2 \tag{3—50}$$

4．利用置换张量展开行列式。

用$\sqrt{g}$乘式（2—15）两边，得到

$$\sqrt{g}\,e_{lmn}a=\sqrt{g}\,e_{ijk}a_l^i a_m^j a_n^k \tag{i}$$

利用式（3—33），上式变为

$$\in_{lmn}a=\in_{ijk}a_l^i a_m^j a_n^k \tag{3—51}$$

类似地有

$$\in^{ijk} a = \in^{lmn} a_l^i a_m^j a_n^k \qquad (3-52)$$

用e^{lmn}乘等式（3—51）两边，注意到式（3—43），得到

$$6a = \in^{lmn} \in_{ijk} a_l^i a_m^j a_n^k \qquad (3-51')$$

上边用置换张量来表示行列式，不仅使公式具有简洁形式，而且对任何坐标系都成立。这就比用式（2—15）、（2—16）有着突出的优点。

对于二阶行列式，设

$$a = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \qquad (3-53)$$

则有

$$a \in_{\gamma\delta} = a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta \in_{\alpha\beta} \qquad (3-54)$$

$$a \in^{\alpha\beta} = a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta \in^{\gamma\delta} \qquad (3-55)$$

$$2a = a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta \in_{\alpha\beta} \in^{\gamma\delta} \qquad (3-56)$$

第三节　一阶张量——向量

在力学中向量的应用是很多的，力、位移都是向量，功可由向量点积求得。研究连续体的受力状态和变形状态总是与度量空间的线元长度，线元夹角，面元，体元相联系的，这些也都可由向量的计算求出。我们已经知道，向量就是一阶张量，它是最简单的张量，这一节我们用张量的方法重新研究向量的计算，所得结果适用于任何一个坐标系。

一、点　　积

1．任意两向量$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$的点积。

在第二章第二节曾把向量用逆变分量和协变分量表示，并计算了功。现设任意两向量$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$，若把它们分别表为

$$\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{v} = v_j \boldsymbol{g}^j$$

则由式（2—47），点积

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u^i v_j \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = u^i v_j \delta_i^j = u^i v_i \qquad (a)$$

若使

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{v}=v^j\boldsymbol{g}_j$$

则有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_iv^j\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=u_iv^j\delta_j^i=u_iv^i \qquad (b)$$

注意到式（3—16）、（3—17）的关系，向量点积还可以用同名分量表示为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u^iv^jg_{ij}=u_iv_jg^{ij} \qquad (c)$$

综合式（a）、（b）、（c），向量的点积可用四种形式表示，即

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u^iv_i=u_iv^i=u^iv^jg_{ij}=u_iv_jg^{ij} \qquad (3-57)$$

2. 向量长度。向量$\boldsymbol{u}$的长度平方可表为

$$|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=u^iu_i=u^iu^jg_{ij}=u_iu_jg^{ij} \qquad (3-58)$$

3. 线元长度。由式（3—15）给出

$$ds^2=|d\boldsymbol{s}|^2=d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s}=g_{ij}dx^idx^j \qquad (3-15)$$

我们知道，在平面笛卡尔直角坐标系和极坐标系中线元长度的平方分别为

$$ds^2=dx^2+dy^2 \qquad (3-59)$$

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2 \qquad (3-60)$$

由第一节例题2式（b'）的度量张量，在球坐标系中

$$\begin{aligned}ds^2&=g_{ij}dx^idx^j\\&=dr^2+r^2\cos^2\varphi d\theta^2+r^2d\varphi^2\end{aligned} \qquad (3-61)$$

在平面笛卡尔斜角坐标系中由第一节例题3式（b'）的度量张量，有

$$\begin{aligned}ds^2&=g_{ij}dx^idx^j\\&=d\xi^2+d\eta^2+2\cos\alpha d\xi d\eta\end{aligned} \qquad (3-62)$$

4. 功。设力向量和位移向量分别表示为

$$\boldsymbol{P}=P^i\boldsymbol{g}_i=P_i\boldsymbol{g}^i$$

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{g}^i=u^i\boldsymbol{g}_i$$

则功

$$W = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} = P^i u_i = P_i u^i = P^i u^j g_{ij} = P_i u_j g^{ij} \quad (3-63)$$

5．两向量的夹角余弦。已由式（3—16′）给出。

二、叉　积

1．基向量的叉积。

在笛卡尔坐标系，基向量$\boldsymbol{g}_i$和$\boldsymbol{g}^i$都是单位向量，而且相互垂直，因此有$\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{g}^3$，$\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_1=-\boldsymbol{g}^3$，……，以及$\boldsymbol{g}^1\times\boldsymbol{g}^2=\boldsymbol{g}_3$，$\boldsymbol{g}^2\times\boldsymbol{g}^1=-\boldsymbol{g}_3$，……，或用置换符号统一表示为

$$\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j \overset{*}{=} e_{ijk}\boldsymbol{g}^k,\ \boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j \overset{*}{=} e^{ijk}\boldsymbol{g}_k \quad (d)$$

在笛卡尔直角坐标系里

$$e_{ijk} \overset{*}{=} \in_{ijk}$$

因此，式（d）可以写为

$$\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j = \in_{ijk}\boldsymbol{g}^k \quad (3-64)$$

及

$$\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j = \in^{ijk}\boldsymbol{g}_k \quad (3-65)$$

这两个方程式全是用张量符号表示的，因此在任何其它的参照标架中也都成立。

2．任意两个向量的叉积。

设任意二向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，且$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则有

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=a^i\boldsymbol{g}_i\times b^j\boldsymbol{g}_j=a^ib^j\in_{ijk}\boldsymbol{g}^k \quad (3-66)$$

令

$$\boldsymbol{q}=q_k\boldsymbol{g}^k$$

对比上二式，得

$$q_k=a^ib^j\in_{ijk} \quad (3-67)$$

类似地可以表示为

$$\boldsymbol{q}=a_ib_j\in^{ijk}\boldsymbol{g}_k \quad (3-68)$$

$$q^k=a_ib_j\in^{ijk} \quad (3-69)$$

上述公式就是两向量叉积在任何参照标架都成立的张量表达式。与通常的向量叉积定义是一致的，即叉积是一个向量，大小等于原来两向量组成的平行四边形面积，方向垂直于原来的两个向量。这一点是很容易证明的。由式（3—16′），向量$\boldsymbol{q}$与$\boldsymbol{a}$的

夹角余弦为

$$\cos\theta=\frac{g_{kl}q^k a^l}{(g_{mn}q^m q^n)^{\frac{1}{2}}(g_{rs}a^r a^s)^{\frac{1}{2}}} \qquad (e)$$

由式（3—69），式（e）的分子为

$$g_{kl}q_k a^l=g_{kl}a^l a_i b_j \in^{ijk}=a_i b_j a_k \in^{ijk}=0$$

上式最后一步为零是显然的，因为行列式中有两行（或列）是相同的。于是有$\cos\theta=0$，即$\boldsymbol{q}$与$\boldsymbol{a}$垂直，同理证明$\boldsymbol{q}$与$\boldsymbol{b}$垂直。如果将式（3—69）用于直角笛卡尔坐标系，则有

$$q^k=a_i b_j e^{ijk}$$

或
$$q_k=a^i b^j e_{ijk}$$

这与式（2—25）一致，说明这里用张量表示的叉积与笛卡尔直角坐标系的叉积是一样的，但是它在任何坐标系中都成立。

对于二维空间，取$\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{g}^3$为单位向量，垂直于其它的基向量，不随坐标系而变，这时如令$\boldsymbol{a}=a^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha$，$\boldsymbol{b}=b^\beta\boldsymbol{g}_\beta$，则

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=a^\alpha b^\beta \in_{\alpha\beta 3}\boldsymbol{g}^3$$

且$\boldsymbol{q}$只有一个分量，为

$$q_3=a^\alpha b^\beta \in_{\alpha\beta} \qquad (3—67')$$

或
$$q^3=a_\alpha b_\beta \in^{\alpha\beta} \qquad (3—69')$$

在坐标变换中q_3或q^3不变。

3．面元。设由两个线元向量$d\boldsymbol{r}$和$d\boldsymbol{s}$组成的面元向量为$d\boldsymbol{A}$（如图3—1，a），则

$$d\boldsymbol{A}=d\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s}$$

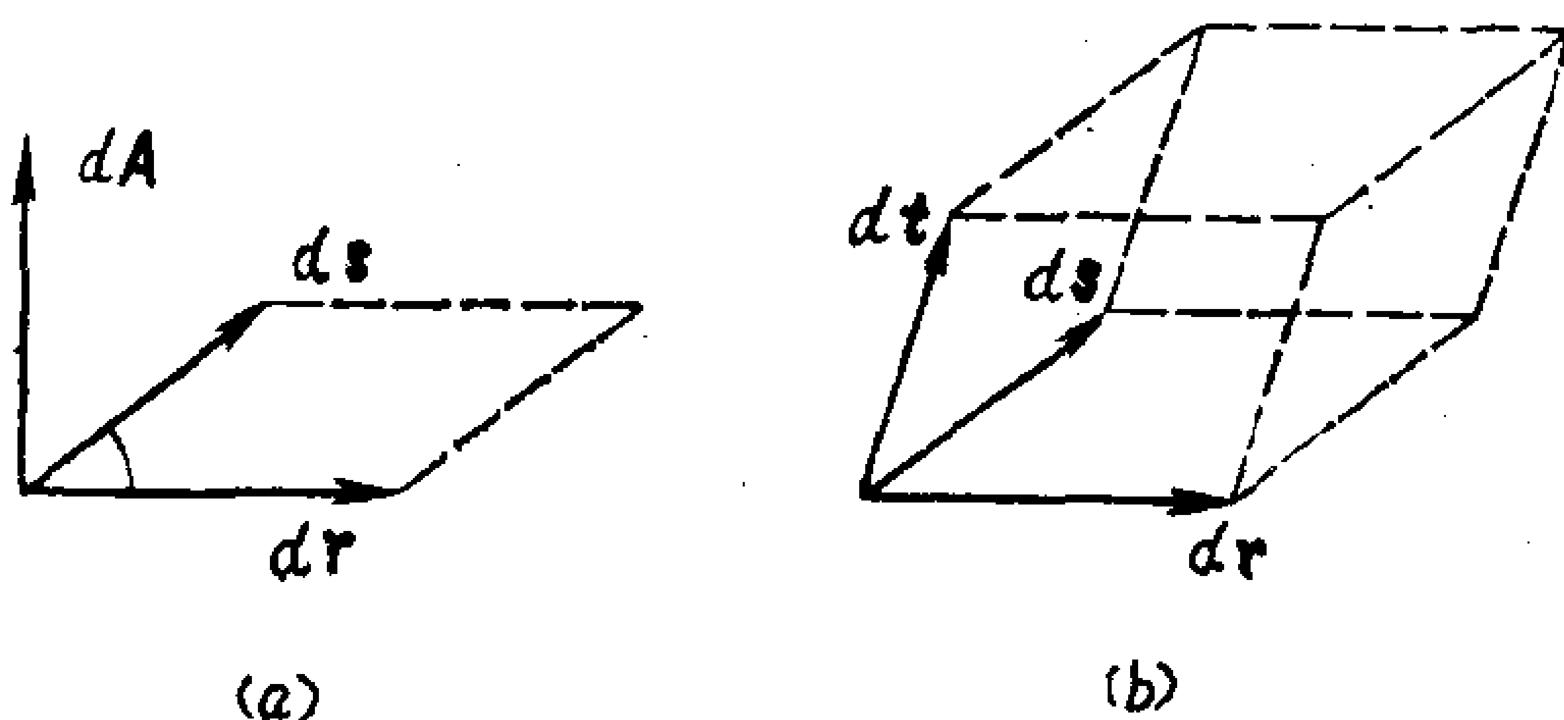


图 3—1

按式（3—67），它在任意参照标架中的分量为

$$dA_k = dr^i ds^j \in_{ijk} \qquad (3-70)$$

在连续介质力学中，当研究某点的应力状态或斜面上的应力时，都需要用到面元，因此它是很重要的。

4．力矩。设过某点A的力向量为$\boldsymbol{f}$，点A相对于某点O的位置向量为$\boldsymbol{r}$（见附录的图附—11），则$\boldsymbol{f}$对O点的力矩向量$\boldsymbol{m}$为

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$$

$$m_k = r^i f^j \in_{ijk} \qquad (3-71)$$

5．流体或气体作用在微元面积上的压力。

设压强为p，面元为$d\boldsymbol{A}$。面元上的力为$d\boldsymbol{F}$，它垂直面元，如$d\boldsymbol{A}$的方向取为面元的外法线方向，则

$$d\mathbf{F} = -pd\boldsymbol{A}$$

$$dF_k = -pdA_k = -pdr^i ds^j \in_{ijk} \qquad (3-72)$$

三、混　积

1．三个向量的混积。我们从向量代数知道（见附录），混积$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$表示由向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成的平行六面体的体积，若令

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{g}_i, \quad \boldsymbol{b} = b^j \boldsymbol{g}_j, \quad \boldsymbol{c} = c^l \boldsymbol{g}_l \qquad (f)$$

则该体积等于

$$V = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = a^i b^j \in_{ijk} \boldsymbol{g}^k \cdot c^l \boldsymbol{g}_l = a^i b^j c^k \in_{ijk} \qquad (3-73)$$

2．体元。$\sqrt{g}$的物理意义。

由式（3—64），有

$$\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2 = \in_{123} \boldsymbol{g}^3 = \sqrt{g}\, \boldsymbol{g}^3 \qquad (g)$$

用$\boldsymbol{g}_3$从右边点乘式（g）两边，得

$$\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_3 = \sqrt{g}\, \boldsymbol{g}^3 \cdot \boldsymbol{g}_3 = \sqrt{g} \qquad (3-74)$$

类似地有

$$\boldsymbol{g}^1 \times \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}^3 = \in^{123} \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \qquad (3-75)$$

所以，我们可以把$\sqrt{g}$理解为以协变基向量为棱的平行六面体的

体积；把$\frac{1}{\sqrt{g}}$理解为以逆变基向量为棱的平行六面体的体积。

如果把三个线元向量取得和基向量一致，即

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_1dx^1, d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_2dx^2, d\boldsymbol{t}=\boldsymbol{g}_3dx^3 \qquad (h)$$

则它们所形成的微元体体积（图3—1,b）为

$$dV=d\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{t}=\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_3dx^1dx^2dx^3$$

将式（3—74）代入上式，得到

$$dV=\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3 \qquad (3—76)$$

或

$$\sqrt{g}=\frac{dV}{dx^1dx^2dx^3} \qquad (3—76')$$

由式（3—76）或（3—76′）表示的几何意义是很重要的，它指出，$\sqrt{g}$是坐标微分所形成的体元体积与坐标微分之积的比例系数，一般说来，它不是常数，与所在位置有关。

如果线元向量不与协变基向量一致，如令

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_idr^i, d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_jdr^j, d\boldsymbol{t}=\boldsymbol{g}_kdt^k \qquad (i)$$

则微元体体积为

$$dV=d\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{t}=dr^ids^jdt^k\in_{ijk} \qquad (3—77)$$

由上式看出，体元的体积是个标量，对于确定的$d\boldsymbol{r}$、$d\boldsymbol{s}$、$d\boldsymbol{t}$，在任何坐标系中它都是同一数值。

3. 质量元。

设物质的密度为ρ，则体元dV内含有的质量为

$$dm=\rho dV=\rho dr^ids^jdt^k\in_{ijk} \qquad (3—78)$$

由于ρ和dV都是标量，所以质量元dm也是标量，不随坐标系的变换而改变。

4. 重量元。

重量是力，有方向，体元dV包含的重量向量用$d\boldsymbol{w}$表示，比重也是个向量，表为

$$\boldsymbol{r}=\gamma^l\boldsymbol{g}_l \qquad (3—79)$$

则

$$d\boldsymbol{w}=\gamma^l\boldsymbol{g}_ldV=\boldsymbol{g}_l\gamma^ldr^ids^jdt^k\in_{ijk} \qquad (3—80)$$

四、例 题

例题1 在笛卡尔直角坐标系中，计算任一线元长度ds，由坐标线围成的面元向量$d\boldsymbol{A}$、体元体积dV。

由式（3—15）、（3—22′），有

$$ds=\sqrt{g_{ij}\,dx^i dx^j}=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \qquad (a')$$

如置$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_1dx^1, d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_2dx^2$，则由$x=\text{const}$及$y=\text{const}$围成的面元可由式（3—70）得到

$$dA_3=dx^1dx^2=dxdy \qquad (b')$$

同理

$$dA_1=dx^2dx^3=dydz \qquad (c')$$

$$dA_2=dx^3dx^1=dzdx \qquad (d')$$

由$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_1dx^1, d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_2dx^2, d\boldsymbol{t}=\boldsymbol{g}_3dx^3$组成的体元，可由式（3—76）求得

$$dV=dx^1dx^2dx^3=dxdydz \qquad (e')$$

该例所求得的结果都是熟知的，在直角坐标系里都可直接得到，似乎没有必要按上面的方法来求，但是对于其它坐标系用上面的方法则会显出十分简单和方便的优点。

例题2 求柱坐标的线元、面元、体元表达式。

在柱坐标中，$g_{11}=1$，$g_{22}=r^2, g_{33}=1$，其余分量为零，而$g=r^2$，故由式（3—15），有

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+dz^2 \qquad (a')$$

如置$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_1dr^1=\boldsymbol{g}_1dr, d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_2ds^2=\boldsymbol{g}_2d\theta, d\boldsymbol{t}=\boldsymbol{g}_3dt^3=\boldsymbol{g}_3dz$，则面元可由式（3—70）求得

$$d\boldsymbol{A}_3=d\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s}=dA_3\boldsymbol{g}^3, dA_3=dr^ids^j\in_{ij3}=rdrd\theta \qquad (b')$$

$$d\boldsymbol{A}_1=d\boldsymbol{s}\times d\boldsymbol{t}=dA_1\boldsymbol{g}^1, dA_1=ds^jdt^k\in_{jk1}=rd\theta dz \qquad (c')$$

$$d\boldsymbol{A}_2=d\boldsymbol{t}\times d\boldsymbol{r}=dA_2\boldsymbol{g}^2, dA_2=dt^kdr^i\in_{ki2}=rdrdz \qquad (d')$$

由式（3—76）求得体元，为

$$dV = rdrd\theta dz \tag{e'}$$

例题 3 求球坐标的线元、面元、体元表达式。

球坐标系中线元长度平方的表达式见式（3—61）。

由第二节式（d）给出，球坐标的$\sqrt{g} = r^2\cos\varphi$，如取$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_1 dr^1 = \boldsymbol{g}_1 dr$, $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{g}_2 ds^2 = \boldsymbol{g}_2 d\theta$, $d\boldsymbol{t} = \boldsymbol{g}_3 dt^3 = \boldsymbol{g}_3 d\varphi$，则有

$$d\boldsymbol{A}_3 = d\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s} = dA_3\boldsymbol{g}^3, dA_3 = dr^i ds^j \in_{ij3} = r^2\cos\varphi drd\theta \tag{a'}$$

$$d\boldsymbol{A}_1 = d\boldsymbol{s} \times d\boldsymbol{t} = dA_1\boldsymbol{g}^1, dA_1 = ds^j dt^k \in_{jk1} = r^2\cos\varphi d\theta d\varphi \tag{b'}$$

$$d\boldsymbol{A}_2 = d\boldsymbol{t} \times d\boldsymbol{r} = dA_2\boldsymbol{g}^2, dA_2 = dt^k dr^i \in_{ki2} = r^2\cos\varphi drd\varphi \tag{c'}$$

而

$$dV = r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi \tag{d'}$$

例题 4 计算平面笛卡尔斜角坐标系中的面元表达式。

由第二节式（e）知，$\sqrt{g} = \sin\alpha$，如取$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_1 dr^1 = \boldsymbol{g}_1 d\xi$，$d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{g}_2 ds^2 = \boldsymbol{g}_2 d\eta$，则

$$d\boldsymbol{A}_3 = d\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s} = dA_3\boldsymbol{g}^3, dA_3 = dr^i ds^j \in_{ij3} = \sin\alpha d\xi d\eta$$

第四节 二阶张量

一、二阶张量的矩阵表示

在第二章第四节，我们用式（2—81）、（2—82）定义了二阶逆变张量和协变张量，在坐标变换中它们满足关系式

$$T^{i'j'} = \beta^{i'}_{i} \beta^{j'}_{j} T^{ij} \tag{3—81}$$

$$T_{i'j'} = \beta^{i}_{i'} \beta^{j}_{j'} T_{ij} \tag{3—82}$$

上面的变换方程还可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} T^{1'1'} & T^{1'2'} & T^{1'3'} \\ T^{2'1'} & T^{2'2'} & T^{2'3'} \\ T^{3'1'} & T^{3'2'} & T^{3'3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'} \\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'} \\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'} \end{pmatrix} \qquad (3-81')$$

及

$$\begin{pmatrix} T_{1'1'} & T_{1'2'} & T_{1'3'} \\ T_{2'1'} & T_{2'2'} & T_{2'3'} \\ T_{3'1'} & T_{3'2'} & T_{3'3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^1_{1'} & \beta^2_{1'} & \beta^3_{1'} \\ \beta^1_{2'} & \beta^2_{2'} & \beta^3_{2'} \\ \beta^1_{3'} & \beta^2_{3'} & \beta^3_{3'} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^1_{1'} & \beta^1_{2'} & \beta^1_{3'} \\ \beta^2_{1'} & \beta^2_{2'} & \beta^2_{3'} \\ \beta^3_{1'} & \beta^3_{2'} & \beta^3_{3'} \end{pmatrix} \qquad (3-82')$$

很明显，只有一阶张量和二阶张量才能用矩阵表示，三阶以上的高阶张量是不能用矩阵表示的。

二、二阶对称张量及其性质

一般说来，二阶张量的分量$T_{ij} \neq T_{ji}$，但是在应用中，有许多张量能满足$T_{ij}=T_{ji}$，例如，我们知道度量张量$g_{ij}=g_{ji}$，应力张量$\sigma^{ij}=\sigma^{ji}$等等，称为对称的张量。

定　义

1．若张量T_{ij}满足

$$T_{ij}=T_{ji} \qquad (3-83)$$

则称T_{ij}为二阶对称的协变张量；

2．若张量T^{ij}满足

$$T^{ij}=T^{ji} \tag{3-84}$$

则称T^{ij}为二阶对称的逆变张量；

3．若张量$T_{i}^{\cdot j}$满足

$$T_{i}^{\cdot j}=T^{j}_{\cdot i} \tag{3-85}$$

则称$T_{i}^{\cdot j}$为二阶对称的混变张量，并记为

$$T_{i}^{\cdot j}=T^{j}_{\cdot i}=T_{i}^{j} \tag{3-85'}$$

必须注意，不存在$T_{i}^{k}=T_{k}^{i}$，因为这一关系式不具有正确的张量形式，张量表达式等号两边相同的自由指标不能一个为上标，另一个为下标。

二阶对称张量的性质：

1．若二阶张量的某种分量是对称的，则其它形式的分量也是对称的。

设　$T_{lk}=T_{kl}$，在该等式两边乘以g^{li}

左边　$T_{lk}g^{li}=T^{i}_{\cdot k}$

右边　$T_{kl}g^{li}=T_{k}^{\cdot i}$

所以　　$T^{i}_{\cdot k}=T_{k}^{\cdot i}$

在上式两边再乘以g^{kj}

左边　$T^{i}_{\cdot k}g^{kj}=T^{ij}$

右边　$T_{k}^{\cdot i}g^{kj}=T^{ji}$

所以　　$T^{ij}=T^{ji}$

2．张量的对称性是不变的，即当参照标架进行变换时，二阶张量的分量保持原来的对称性质。换句话说，若已知二阶张量在某种参照标架中是对称的，则它在任何其它的参照标架中也一定是对称的。

设在原来的参照标架中有

$$T_{ij}=T_{ji}$$

在新参照标架中，有

左边　$T_{ij}\beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}=T_{i'j'}$

右边　$T_{ji}\beta_{j'}^{j}\beta_{i'}^{i}=T_{j'i'}$

显然，上二等式左端是相等的，因此

$$T_{i'j'}=T_{j'i'}$$

3. 在三维空间中，二阶对称张量有六个独立分量。

三、二阶反对称张量及其性质

定　义

1. 若张量T_{ij}满足

$$T_{ij}=-T_{ji} \tag{3—86}$$

则称T_{ij}为二阶反对称协变张量；

2. 若张量T^{ij}满足

$$T^{ij}=-T^{ji} \tag{3—87}$$

则称T^{ij}为二阶反对称逆变张量；

3. 若张量$T_{i}^{\cdot j}$满足

$$T_{i}^{\cdot j}=-T^{j}_{\cdot i} \tag{3—88}$$

则称$T_{i}^{\cdot j}$为二阶反对称混变张量。

二阶反对称张量的性质：

1. 若二阶张量的某种分量是反对称的，则其它形式的分量也是反对的。

例如，若$T_{lk}=-T_{kl}$，等式两边乘以g^{li}，注意到$g^{li}=g^{il}$，则

$$T^{i}_{\cdot k}=T_{lk}g^{li}=-T_{kl}g^{il}=-T_{k}^{\cdot i}$$

2. 二阶张量的反对称性质是不变的。

例如，在新坐标系中

$$T_{i'j'}=T_{ij}\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}=-T_{ji}\beta^{j}_{j'}\beta^{i}_{i'}=-T_{j'i'}$$

3. 在三维空间中，二阶反对称张量有三个独立的分量，等价于一个向量，因此也称为二重向量。

因为根据定义$T_{ii}=-T_{ii}$（不求和）必然$T_{11}=T_{22}=T_{33}=0$，所以二阶反对称张量只有三个独立分量，与一个向量的数目相同。

四、二阶张量的分解

1． 任何一个二阶张量都可以唯一地分解为一个对称张量和一个反对称张量之和。

在第一段我们已把二阶张量用矩阵表示，而一个 3 × 3 的矩阵总可以分解为一个对称的和一个反对称的矩阵之和。

例如，二阶协变张量的分量总可以写为

$$T_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})+\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji}) \qquad (3-89)$$

令

$$R_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji}) \qquad (3-90)$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji}) \qquad (3-91)$$

于是

$$T_{ij}=R_{ij}+S_{ij} \qquad (3-89')$$

由式（3—90）和（3—91），R_{ij}的对称性质和S_{ij}的反对称性质是明显的。

说明这种分解的最好例子是弹性力学变形分析中的相对位移张量，见第一章。

利用置换张量可将对称和反对称张量表示为

$$b_{ij}\in^{ijk}=\begin{cases}0\ ,\text{如果}b_{ij}=b_{ji} & (\text{对称张量})\\ \omega^k,\text{如果}b_{ij}=-b_{ji} & (\text{反对称张量})\end{cases} \qquad (3-92)$$

$$b^{ij}\in_{ijk}=\begin{cases}0, & \text{如果}b^{ij}=b^{ji}\ (\text{对称张量})\\ \omega_k, & \text{如果}b^{ij}=-b^{ji}\ (\text{反对称张量})\end{cases} \qquad (3-93)$$

如果b_{ij}是非对称张量，则式$b^{ij}\in_{ijk}=\omega_k$表示将其反对称部分分离出来。

设二维空间非对称张量是$b_{\gamma\delta}$，其差值$b_{\gamma\delta}-b_{\delta\gamma}$不为零，可表示为

$$b_{\gamma\delta}-b_{\delta\gamma}=b_{\alpha\beta}(\delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\delta-\delta^\alpha_\delta\delta^\beta_\gamma)$$

注意到式（3—48），则有

$$b_{\gamma\delta}-b_{\delta\gamma}=b_{\alpha\beta}\in^{\alpha\beta}\in_{\gamma\delta} \qquad (3-94)$$

如果$b_{\gamma\delta}$是对称张量，则

$$b_{\alpha\beta}\in^{\alpha\beta}=0 \qquad (3-95)$$

在一般情形下，如果c^{ij}是对称张量，d_{ij}是反对称张量，则

$$c^{ij}d_{ij}=0 \qquad (3-96)$$

这是因为，根据定义有

$$c^{ij}d_{ij}=-c^{ij}d_{ji}$$

$$c^{ij}(d_{ij}+d_{ji})=0$$

由反对称性质，圆括号内总保持为零。

2. 分解为球张量和偏张量。

设二阶张量$T^i_{\cdot j}$，令

$$T=\frac{1}{3}T^i_{\cdot i} \qquad (3-97)$$

则称$T\delta^i_j$为$T^i_{\cdot j}$的球张量，而差

$$S^i_{\cdot j}=T^i_{\cdot j}-T\delta^i_j \qquad (3-98)$$

称为$T^i_{\cdot j}$的偏张量。

如用逆变张量表示，上式还可写为

$$T=\frac{1}{3}T^{ik}g_{ik} \qquad (3-99)$$

$$S^{ik}g_{kj}=T^{ik}g_{kj}-Tg^{ik}g_{kj} \qquad (3-100)$$

第四章 张 量 代 数

在这一章里，我们将研究张量代数的基本运算。用代数方法研究，张量运算必须满足这样的要求，即进行它所定义的运算后所得到的结果仍旧是一个张量。

如果两个同阶张量，指标的结构和次序相同，在某一个坐标系中对应分量相等，我们就把它们称为相等的张量。

把一个张量的上标或下标调换位置所得到的张量，称为原张量的同分异构张量。T^{ij}与T^{ji}，$T^{ij}_{\cdot\cdot k}$与$T^{ji}_{\cdot\cdot k}$等都是同分异构张量。一个n阶张量有$n!$个同分异构张量。

第一节 张量的基本运算

一、加 法

只有阶数相同、指标的结构和次序相同的诸张量可以施行加法运算，加法运算的结果称为和。

求几个张量的代数和，就是将对应的同名分量相加(或相减)。这对于一阶张量——向量加法已是非常熟悉的了，对于二阶和高阶张量也是同样的。例如张量A^{ij}与B^{ij}的和C^{ij}可以表示为

$$C^{ij}=A^{ij}+B^{ij} \qquad (4-1)$$

C^{ij}的张量性质是明显的，根据定义，有

$$A^{i'j'}=\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}A^{ij}$$

$$B^{i'j'}=\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}\beta^{ij}$$

因而

$$C^{i'j'}=A^{i'j'}+B^{i'j'}=\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}A^{ij}+\beta^{i'}_{i}B^{j'}_{j}B^{ij}$$

$$=\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}(A^{ij}+B^{ij})=\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}C^{ij}$$

这就证明了C^{ij}是与A^{ij}、B^{ij}同类型的张量。

张量加法的性质：

1．张量加法满足代数运算的交换律和结合律。例如

$$D^{ij}=A^{ij}+B^{ij}+C^{ij}=(C^{ij}+A^{ij})+B^{ij} \qquad (4-2)$$

2．在某个坐标系或参照标架中，一个等于诸张量之和的张量，在其它任一坐标系或参照标架中仍等于这些张量之和，也就是说，张量的加法运算相对于坐标变换是不变的。

二、乘　　法

对于任何阶与结构的张量都可以施行乘法运算。

标量与张量相乘须将张量的每一个分量与该标量相乘，可以交换标量与张量的次序，所得到的是一个与原张量结构和阶数都相同的张量。

两个任意张量的乘法定义为：用第一个张量的每一个分量乘以第二个张量中的每一个分量，由这些乘积作为分量所组成的集合仍是一个张量，称为前两个张量的乘积。

类似地可以定义多个张量的乘法。

设有一个二阶张量$A_{i}^{\cdot j}$和一个三阶张量$B^{m}_{\cdot kl}$相乘。在三维空间中$A_{i}^{\cdot j}$有$3^2=9$个分量，$B^{m}_{\cdot kl}$有$3^3=27$个分量，根据前述乘法定义，须将第一个张量中9个分量的每一个乘以第二个张量中27个分量中的每一个，显然乘积张量有$3^2\cdot3^3=3^5=243$个分量，是一个五阶张量，记为

$$C_{i\cdot\cdot kl}^{\cdot jm}=A_{i}^{\cdot j}B^{m}_{\cdot kl} \qquad (4-3)$$

下面我们证明$C_{i\cdot\cdot kl}^{\cdot jm}$是一个张量。在新参照标架中，显然有

$$A_{i'}^{\cdot j'}=\beta^{i}_{i'}\beta^{j'}_{j}A_{i}^{\cdot j}$$

$$B^{m'}_{\cdot k'l'}=\beta^{m'}_{m}\beta^{k}_{k'}\beta^{l}_{l'}B^{m}_{\cdot kl}$$

于是

$$C_{i'\cdot\cdot k'l'}^{\cdot j'm'}=A_{i'}^{\cdot j'}B^{m'}_{\cdot k'l'}=\beta^{i}_{i'}\beta^{j'}_{j}\beta^{m'}_{m}\beta^{k}_{k'}\beta^{l}_{l'}A_{i}^{\cdot j}B^{m}_{\cdot kl}$$

$$=\beta^{i}_{i'}\beta^{j'}_{j}\beta^{m'}_{m}\beta^{k}_{k'}\beta^{l}_{l'}C_{i\cdot\cdot kl}^{\cdot jm}$$

根据张量的定义，该式表明$C_{i\cdot\cdot kl}^{\cdot jm\cdot\cdot}$是一个三次协变二次逆变的五阶混变张量。

张量乘法的性质：

1. 张量乘法是不可交换的。例如

$$C_{ijk}=A_{ij}B_k, \qquad C_{kij}=B_kA_{ij}$$

而

$$C_{ijk}\neq C_{kij}$$

因为两个张量的指标次序不同。

2. 张量乘法相对于坐标变换是不变的。

3. 乘积张量的阶数等于因子张量阶数之和，这可由指标的个数或变换系数的个数得出。

三、连并和缩并

当两个张量相乘时，如果一个张量的某一上标和另一张量的某一下标的标号相同，根据爱因斯坦约定，应按该哑标求和。这样的乘积仍为一个张量，它的阶数取决于哑标个数，每一对哑标使乘积张量的阶数减 2 。上述的乘积运算称为张量的连并。例如

$$C^{ij}=A_{m\cdot n}^{\cdot i\cdot}B^{mjn} \qquad (4-4)$$

两个三阶张量，由于有两对哑标，连并后的张量是一个二阶逆变张量。必须注意，不能对相同的两个上标（或下标）连并，因为乘积不具有正确的张量形式。由此，同是逆变或同是协变的两个张量不能进行连并运算。

作为特例。我们来看两个向量的连并。设$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{g}^i$，$\boldsymbol{v}=v^j\boldsymbol{g}_j$，则连并后得一标量，表为

$$A=u_iv^i$$

所以两个向量的连并就是该二向量的点积。

对于同一个张量的某个上标和某个下标取为相同的标号，表示对该哑标求和，其结果仍为张量，这种运算称为缩并。例如

$$A_{i}^{\cdot j}=B_{i\cdot k\cdot}^{\cdot j\cdot k}$$

缩并后的张量阶数取决于哑标个数，每增加一对哑标，张量

阶数减2。

作为例子，应力张量$\sigma_i^{\cdot j}$的缩并$\sigma_i^{\cdot i}$为一标量，是应力张量的第一不变量。

显然，缩并只能对二阶以上的混变张量进行。

四、指标的上升和下降

在第三章，由式（3—17）和（3—18）我们看到，逆变向量和协变向量之间的关系是由度量张量联系的，$u^k=g^{kj}u_j, u_k=g_{kj}u^j$，这里度量张量的逆变分量可以提升向量的指标，而度量张量的协变分量可以下降向量的指标。我们可以把指标的上升和上降视为一种运算，则这种运算是通过度量张量与向量的连并来实现的。在式（3—19），我们把这一运算用于二阶张量，实际上，它可以推广到任一阶张量。例如

$$
\begin{aligned}
&g^{kl}T_{ijl}=T_{ij}^{\cdot\cdot k}\\
&g^{jm}g^{kl}T_{iml}=T_i^{\cdot jk}\\
&g_{jm}g_{kl}T_i^{\cdot ml}=T_{ijk}
\end{aligned}
\qquad (4-5)
$$

等等。

因为度量张量本身是张量，根据上边的运算，有

$$
\begin{aligned}
&g_{ik}g^{kj}=g_i^j\\
&g_{ik}g^{ij}g^{kl}=g^{jl}
\end{aligned}
\qquad (4-6)
$$

根据指标上升和下降的这种运算，我们可以从具有某种结构的张量得到该张量的其它结构形式。

五、对称化和反对称化

在第三章第三节研究二阶张量时，我们把任意一个张量分解为对称的和反对称的张量。式（3—90）中的R_{ij}是将原张量T_{ij}的对称化，式（3—91）中的S_{ij}是将原张量T_{ij}的反对称化。现在，我们把这一方法推广到任意的一个高阶张量。

1. 对称化

对于任意一个n阶张量中的某些上标或某些下标中的r个指

标的对称化，就是把这 r 个指标按不同次序排列所得到的$r!$个同分异构张量求和并除以$r!$的算术平均值运算。其结果关于所参与的 r 个指标对称，亦即所得张量与对称化指标的位置无关，称为关于该 r 个指标的对称张量。习惯上把参与对称化的指标用一对圆括号括起来，而对未参与对称化的指标用一对竖线隔开。例如，对式（3—90）可以写为

$$T_{(ij)}=\frac{1}{2!}(T_{ij}+T_{ji}) \qquad (4-7)$$

对于五阶混合张量$T_{m}^{\cdot ijkl}$中的三个上标 i 、j 、l 对称化，则得到

$$T_{m}^{\cdot (ij|k|l)}=\frac{1}{3!}(T_{m}^{\cdot ijkl}+T_{m}^{\cdot likj}+T_{m}^{\cdot jlki}$$
$$+T_{m}^{\cdot jikl}+T_{m}^{\cdot ljki}+T_{m}^{\cdot ilkj}) \qquad (4-8)$$

如此等等，可以很容易地写出一张量关于某几个指标的对称张量。

2. 反对称化

反对称化运算就是将参与反对称化的 r 个上标或下标，通过指标的交换构成$r!$个同分异构张量，对于指标偶次交换得到的张量取正号，奇次交换得到的张量取负号，由这些张量求代数和除以$r!$的算术平均值，所得到的张量就是关于这 r 个指标的反对称张量。在这个张量中将 r 个指标里的任意两个换位时，张量改变正、负号。

习惯上，把参与反对称化的指标用一对方括号括起来，不参与反对称化的指标也用一对竖线隔开。

根据反对称化运算，式（3—91）可以表为

$$T_{[ij]}=\frac{1}{2!}(T_{ij}-T_{ji}) \qquad (4-9)$$

对于五阶混合张量$T_{m}^{\cdot ijkl}$关于指标 i 、j 、l 的反对称张量为

$$T_{m}^{\cdot [ij|k|l]}=\frac{1}{3!}(T_{m}^{\cdot ijkl}+T_{m}^{\cdot likj}+T_{m}^{\cdot jlki}$$
$$-T_{m}^{\cdot jikl}-T_{m}^{\cdot ljki}-T_{m}^{\cdot ilkj}) \qquad (4-10)$$

类似地可以对于任何一个高于二阶的张量进行反对称化运算。

第二节　可乘张量。对称张量和反对称张量

一、可乘张量

根据矩阵乘法，任何阶的张量相乘仍得张量，积张量的阶数等于因子张量阶数之和。倘若因子张量是n个向量，则乘积为一个n阶张量。例如

$$M^{i}_{\cdot jk\cdots l}=a^{i}b_{j}c_{k}\cdots d_{l} \qquad (4-11)$$

按式（4—11）由向量积确定的张量称为可乘张量，它是最简单的张量。

现在要问是否所有张量都可用最简单的可乘张量来表示呢？回答是肯定的，下面给以简要的说明。

如果不预先限制可乘张量的数目，上述论断的正确性是很明显的。

设有二阶张量c^{ij}，另由向量a^{i}与b^{j}相乘得到可乘张量$a^{i}b^{j}$，这时若用$a^{i}b^{j}$表示c^{ij}即建立一一对应关系，由于a^{i}、b^{j}只有六个分量，所以不能保证c^{ij}中的九个分量都相互独立。但是，如果我们再加上个由d^{i}、e^{j}构成的可乘张量，建立

$$c^{ij}=a^{i}b^{j}+d^{i}e^{j} \qquad (4-12)$$

的对应关系，总可以适当的选择这几个向量以得到九个相互独立的c^{ij}，所以，一个二阶张量最少可用两个可乘张量之和来表示。如果c^{ij}是一个对称张量，就可以用一个可乘张量来表示。

再如，对于一个三阶张量$M^{i}_{\cdot jk}$，它有27个分量，而构成一个三阶可乘张量的三个向量只有九个分量，因此至少需要三个可乘张量才可以确定$M^{i}_{\cdot jk}$。类似的分析可用于更高阶的张量。总之，任何一个张量都可以表为诸可乘张量之和。

二、对称张量

如果逆变张量或协变张量相对于全部指标都是对称化的，称为对称张量。

例如，T^{ij}是对称张量，即

$$T^{ij}=T^{(ij)} \quad (4-13)$$

它表示

$$T^{ij}=T^{ji} \quad (4-14)$$

这与第三章第三节所定义的二阶对称张量是一致的。再如，若a^ib^j是对称张量，即$a^ib^j=a^{(i}b^{j)}$，表示$a^ib^j=a^jb^i$，等等。

若T^{ijk}是三阶对称张量，即

$$T^{ijk}=T^{(ijk)} \quad (4-15)$$

它表示

$$T^{ijk}=T^{jki}=T^{kij}=T^{jik}=T^{ikj}=T^{kji} \quad (4-16)$$

若四阶张量 $T^{ijkl}=T^{((ij)(kl))}$，表示该张量关于 i、j 对称，关于 k、l 对称，关于ij，kl对称。

三、反对称张量

如果张量的阶数小于或等于空间的维数，当逆变张量或协变张量相对于全部指标都是反对称化的时候，就称这个张量为反对称张量。反对称张量中，两个指标数值相等的分量恒等于零。

在三维空间里，我们讨论二阶反对称张量和三阶反对称张量。设T^{ij}是一反对称张量，即

$$T^{ij}=T^{[ij]} \quad (4-17)$$

它表示

$$T^{ij}=-T^{ji} \quad (4-18)$$

如果a^ib^j是反对称张量，即$a^ib^j=a^{[i}b^{j]}$，表示$a^ib^j=-a^jb^i$。

若T^{ijk}是三阶反对称张量，即

$$T^{ijk}=T^{[ijk]} \quad (4-19)$$

在张量的27个分量中，独立的分量只有一个。例如，置换张量$\in^{ijk}$、$\in_{ijk}$就是三阶的反对称张量，每个张量只有一个独立的

分量，这已是大家所熟知的了。

第三节　二阶张量的特征值和不变量

前面我们在坐标变换中考察并定义了二阶张量，现在我们再从另外一个角度来考察二阶张量。

根据连并运算，二阶张量$T^{i}_{\cdot j}$满足关系式

$$b^{i}=T^{i}_{\cdot j}a^{j} \tag{4—20}$$

为了明确起见，假设向量a^{j}为空间点的坐标并记为x^{j}，则式（4—20）可以写为

$$b^{i}=T^{i}_{\cdot j}x^{j} \tag{4—21}$$

对该式可以从两个方面来理解：首先，若把$T^{i}_{\cdot j}$作为变换系数，则b^{i}为新坐标系中的坐标分量$x^{i'}$，用我们以前的记号，式（4—21）为

$$x^{i'}=T^{i'}_{\cdot j}x^{j} \tag{4—22}$$

其次，我们仍在旧坐标系中考察向量$x^{i'}$，即视x^{j}与b^{i}为同一坐标系中的两点，这时式（4—21）相当于一个变换，$T^{i}_{\cdot j}$把向量x^{j}（点）变换为向量b^{i}（点），我们把后者称为前者的象，用记号x'^{i}表示，于是式（4—21）可写为

$$x'^{i}=T^{i}_{\cdot j}x^{j} \tag{4—23}$$

实际上对于任一个向量v^{j}，我们有

$$v'^{i}=T^{i}_{\cdot j}v^{j} \tag{4—24}$$

式中，v^{j}是向量的分量，v'^{i}是同一向量的象的分量。

如果$\det(T^{i}_{\cdot j})\neq 0$，则式（4—24）可以求逆。

假设在式（4—24）中，象$v'^{i}=\lambda v^{i}$，即向量经过变换后只改变大小不改变方向，我们把这个向量称为二阶张量$T^{i}_{\cdot j}$的特征向量，这时式（4—24）可以写为

$$T^{i}_{\cdot j}v^{j}=\lambda v^{i}=\lambda\delta^{i}_{j}v^{j} \tag{4—25}$$

或

$$(T^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^{i}_{j})v^{j}=0 \tag{4—25'}$$

显然，由于式（4—25′）是线性齐次式，存在非零解的条件是

$$\det(T^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^{i}_{j})=0 \qquad (4-26)$$

或写为

$$\begin{vmatrix} T^{1}_{\cdot 1}-\lambda & T^{1}_{\cdot 2} & T^{1}_{\cdot 3} \\ T^{2}_{\cdot 1} & T^{2}_{\cdot 2}-\lambda & T^{2}_{\cdot 3} \\ T^{3}_{\cdot 1} & T^{3}_{\cdot 2} & T^{3}_{\cdot 3}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (4-26')$$

式中，λ称为特征值。利用式（3—51′），上式左边可表为

$$\det(T^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^{i}_{j})$$

$$=\frac{1}{6}(T^{i}_{\cdot l}-\lambda\delta^{i}_{l})(T^{j}_{\cdot m}-\lambda\delta^{j}_{m})(T^{k}_{\cdot n}-\lambda\delta^{k}_{n})\in^{lmn}\in_{ijk}$$

展开并注意到式（3—42）、（3—43），有

$$\det(T^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^{i}_{j})$$

$$=\frac{1}{6}[-\lambda^{3}\delta^{i}_{l}\delta^{j}_{m}\delta^{k}_{n}+\lambda^{2}(\delta^{i}_{l}\delta^{j}_{m}T^{k}_{\cdot n}+\delta^{i}_{l}T^{j}_{\cdot m}\delta^{k}_{n}+T^{i}_{\cdot l}\delta^{j}_{m}\delta^{k}_{n})$$
$$-\lambda(\delta^{i}_{l}T^{j}_{\cdot m}T^{k}_{\cdot n}+T^{i}_{\cdot l}\delta^{j}_{m}T^{k}_{\cdot n}$$
$$+T^{i}_{\cdot l}T^{j}_{\cdot m}\delta^{k}_{n})+T^{i}_{\cdot l}T^{j}_{\cdot m}T^{k}_{\cdot n}]\in^{lmn}\in_{ijk}$$

$$=\frac{1}{6}[-\lambda^{3}\in^{ijk}\in_{ijk}+\lambda^{2}(T^{k}_{\cdot n}\in^{ijn}\in_{ijk}$$
$$+T^{j}_{\cdot m}\in^{imk}\in_{ijk}+T^{i}_{\cdot l}\in^{ljk}\in_{ijk})$$
$$-\lambda(T^{j}_{\cdot m}T^{k}_{\cdot n}\in^{imn}\in_{ijk}+T^{i}_{\cdot l}T^{k}_{\cdot n}\in^{ljn}\in_{ijk}$$
$$+T^{i}_{\cdot l}T^{j}_{\cdot m}\in^{lmk}\in_{ijk})+T^{i}_{\cdot l}T^{j}_{\cdot m}T^{k}_{\cdot n}\in^{lmn}\in_{ijk}]$$

$$=\frac{1}{6}[-6\lambda^{3}+2\lambda^{2}(T^{k}_{\cdot k}+T^{j}_{\cdot j}+T^{i}_{\cdot i})-\lambda(T^{j}_{\cdot j}T^{k}_{\cdot k}-T^{j}_{\cdot k}T^{k}_{\cdot j}$$
$$+T^{i}_{\cdot i}T^{k}_{\cdot k}-T^{i}_{\cdot k}T^{k}_{\cdot i}+T^{i}_{\cdot i}T^{j}_{\cdot j}-T^{i}_{\cdot j}T^{j}_{\cdot i})+6\det T^{i}_{\cdot j}]$$

$$=-\lambda^{3}+T^{i}_{\cdot i}\lambda^{2}-\frac{1}{2}(T^{i}_{\cdot i}T^{j}_{\cdot j}-T^{i}_{\cdot j}T^{j}_{\cdot i})\lambda+\det T^{i}_{\cdot j}$$

于是式（4—26′）变为

$$\lambda^{3}-T^{i}_{\cdot i}\lambda^{2}+\frac{1}{2}(T^{i}_{\cdot i}T^{j}_{\cdot j}-T^{i}_{\cdot j}T^{j}_{\cdot i})\lambda-\det T^{i}_{\cdot j}=0 \qquad (4-27)$$

式（4—27）是关于特征值λ的三次代数方程式，称为张量$T^{i}_{\cdot j}$的特征方程式。下面我们讨论几个有关的问题。

1. 特征方程式（4—27）是用张量表示的，因此在任何坐

标系中都成立，换个坐标系，只须将式（4—27）中旧坐标系中的张量分量$T^{i}_{\cdot j}$换成新坐标系中的张量分量$T^{i'}_{\cdot j'}$。

2. 特征向量和特征值不随张量分量所在坐标系而变化，因此在坐标变换后三次方程式（4—27）的根 λ不变，亦即该方程的系数在所有的坐标系中都是相同的，或者说对于坐标变换该方程式的三个系数是个不变量，记为

$$
\begin{aligned}
&T_{\mathrm{I}}=T^{i}_{\cdot i}\\
&T_{\mathrm{II}}=T^{i}_{\cdot i}T^{j}_{\cdot j}-T^{i}_{\cdot j}T^{j}_{\cdot i}\\
&T_{\mathrm{III}}=\det T^{i}_{\cdot j}
\end{aligned}
\qquad (4-28)
$$

式中，T_{I}、T_{II}、T_{III}分别称为张量$T^{i}_{\cdot j}$的第一、第二、第三不变量。由这三个不变量的任意组合可以得到无限多个不变量，但是只有三个是独立的。由T_{I}、T_{II}组合的不变量，常见到的如

$$T_{\mathrm{I}}^{2}-T_{\mathrm{II}}=T^{i}_{\cdot j}T^{j}_{\cdot i} \qquad (4-29)$$

$$2T_{\mathrm{I}}^{2}-3T_{\mathrm{II}}=3T^{i}_{\cdot j}T^{j}_{\cdot i}-T^{i}_{\cdot i}T^{j}_{\cdot j} \qquad (4-30)$$

在应用中有时用式（4—29）或（4—30）代替式（4—28）中的第二不变量T_{II}。

3. 一般情形下求解式（4—27）可以得到三个不同的根，再利用式（4—25）就可确定三个特征向量。

特征向量的方向称为二阶张量的主方向或主轴。

假设$T^{i}_{\cdot j}$是一个对称的二阶张量，$\lambda_{(1)}$、$\lambda_{(2)}$、$\lambda_{(3)}$是三个不相同的特征值，相应的三个特征向量为$v^{i}_{(1)}$、$v^{j}_{(2)}$、$v^{k}_{(3)}$ *)。下面我们证明，对称二阶张量的特征值为实数，不相同特征值所对应的特征向量相互正交。以第一和第二个特征值为例证明。设$\lambda_{(1)}\neq\lambda_{(2)}$，这时式（4—25）可以写为

$$T^{i}_{\cdot j}v^{j}_{(1)}=\lambda_{(1)}v^{i}_{(1)} \qquad (a)$$

及

$$T^{k}_{\cdot l}v^{l}_{(2)}=\lambda_{(2)}v^{k}_{(2)} \qquad (b)$$

将式（a）两边乘g_{il}，右边变为$\lambda_{(1)}v_{(1)l}$，而左边为

$$T^{i}_{\cdot j}g_{il}v^{j}_{(1)}=T_{lj}g^{jk}v_{(1)k}=T_{l}^{\cdot k}v_{(1)k} \qquad (c)$$

于是有

*）带圆括号的数字或文字下标不是指标标号。

$$T_i^{\cdot k} v_{(1)k} = \lambda_{(1)} v_{(1)i} \quad (d)$$

再用$v_{(1)k}$乘式（b）两边，用$v^l_{(2)}$乘式（d）两边，得

$$T^k_{\cdot l} v^l_{(2)} v_{(1)k} = \lambda_{(2)} v^k_{(2)} v_{(1)k} \quad (e)$$

$$T_l^{\cdot k} v_{(1)k} v^l_{(2)} = \lambda_{(1)} v_{(1)l} v^l_{(2)} \quad (f)$$

对比以上二式看出，如$T^k_{\cdot l} = T_l^{\cdot k}$即对称张量，则上二式的左边相等，因此有

$$(\lambda_{(2)} - \lambda_{(1)}) v_{(1)k} v^k_{(2)} = 0 \quad (g)$$

因为$\lambda_{(2)} \neq \lambda_{(1)}$，所以必有

$$v_{(1)k} v^k_{(2)} = 0 \quad (h)$$

同理可证另外两种情形，或共同写为

$$v_{(m)k} v^k_{(n)} = 0 \qquad m \neq n \quad (4-31)$$

这就证明了对应不同特征值的特征向量相互正交。注意，这一结论只适用于对称张量，而不适用于非对称张量。

下面进一步证明在对称张量情形下特征值只能是实数。利用反证法，设有一对特征值是复数，如令$\lambda_{(1)} = r + is$，$\lambda_{(2)} = r - is$，相应的特征向量为$v_{(1)j} = u_j + iw_j$，$v_{(2)j} = u_j - iw_j$，其中r、s、u_j、w_j均为实数。这时，根据正交关系式（4—31）要求

$$(u_j + iw_j)(u^j - iw^j)$$
$$= u_j u^j + w_j w^j + i(w_j u^j - u_j w^j) = 0 \quad (i)$$

上式圆括号内的两项相等相互抵消，前二项的每一项均为正数，故式（i）不可能成立，必须放弃特征值为复数的假定。

4．二阶对称张量的正规形式。若把特征向量选为基向量，即以二阶对称张量的三个主轴作为参照标架，这时对称张量可以简化为对角线形式，称为二阶对称张量的正规形式。

设特征向量用原来的基向量表示为

$$\boldsymbol{v}_{(m)} = v^i_{(m)} \boldsymbol{g}_i \quad (j)$$

如把它作为一个新的基向量$\boldsymbol{g}_{m'}$，则它与旧基向量$\boldsymbol{g}_i$的关系由变换系数$\beta^i_{m'}$联系，为

$$\boldsymbol{g}_{m'} = \beta^i_{m'} \boldsymbol{g}_i \quad (k)$$

很明显，这时特征向量的逆变分量$v^i_{(m)}$就是变换系数$\beta^i_{m'}$。于是，正交关系式（4—31），即

$$v_{(m)k}v^k_{(n)}=v^i_{(m)}v^k_{(n)}g_{ik}=0 \quad m\neq n \qquad (l)$$

可以写为

$$\beta^i_{m'}\beta^k_{n'}g_{ik}=g_{m'n'}=0 \quad m'\neq n' \qquad (m)$$

式（m）表示新基向量$\mathbf{g}_{m'}$，相互正交，这是意料中的，因为它们是特征向量。

由于式（4—25′）只决定特征向量的方向而不决定它们的大小，所以在建立式（4—25）时，我们就可以把向量$\boldsymbol{v}_{(m)}=v^i_{(m)}\mathbf{g}_i$取为单位向量，即这时$\mathbf{g}_{m'}$是单位向量，于是有关系式

$$\beta^i_{m'}\beta^k_{n'}g_{ik}=g_{m'n'}=1 \quad m'=n' \qquad (n)$$

综合式（m）、（n）有

$$g_{m'n'}=\begin{cases}0 & m'\neq n'\\ 1 & m'=n'\end{cases} \qquad (o)$$

式（o）指出，由单位特征向量构成的新的参照标架是笛卡尔标架。

如在式（4—25）第一个等号两边乘以g_{ik}，它还可以写为

$$T_{kj}v^j_{(m)}=\lambda_{(m)}g_{ik}v^i_{(m)} \qquad (p)$$

如将$v^i_{(m)}$换为$\beta^i_{m'}$,并用$\beta^k_{n'}$乘等式两边，等式左边变为

$$T_{kj}\beta^j_{m'}\beta^k_{n'}=T_{m'n'}$$

等式右边变为

$$\lambda_{(m)}g_{ik}\beta^i_{m'}\beta^k_{n'}=\lambda_{(m)}g_{m'n'}$$

于是式（p）变为

$$T_{m'n'}=\lambda_{(m)}g_{m'n'} \qquad (q)$$

注意到式（o），显然有

$$T_{m'n'}=\begin{cases}0 & m'\neq n'\\ \lambda_{(m)} & m'=n'\end{cases} \qquad (4—32)$$

亦即，如以三个主轴作为参照标架，对称张量可以简化为对角矩阵形式。式（4—32）还可以写为

$$\begin{pmatrix} T_{1/1/} & 0 & 0 \\ 0 & T_{2/2/} & 0 \\ 0 & 0 & T_{3/3/} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix} \quad (4—32')$$

5．**类似于式（4—25′），我们有关系式**

$$(T^{i}_{\cdot j} - \lambda\delta^{i}_{j})v_{i} = 0 \quad (4—33)$$

显然，v_i和v^j属于同一个特征值λ，分别称为 $T^{i}_{\cdot j}$ 的左特征向量和右特征向量。

第四节　仿射变换。物体的刚性转动

在式（4—23）、（4—24）中，建立了同一个坐标系中两个空间点或向量的关系式，或者说它们确定了空间点或向量的运动。由式（4—23）、（4—24）所确定的空间变换称为仿射变换。

很明显，连续数次进行仿射变换的结果仍然是仿射变换，也就是说仿射变换构成一个群。

下面应用仿射变换来研究变形体的刚性转动或刚体的转动。

首先考察一刚体绕固定轴的转动。为方便，取笛卡尔直角坐标系并把x_3作为旋转轴进行研究。用 α表示刚体的转角。设刚体上一点A，开始时坐标为x_1, x_2, x_3，转动到A'后，其坐标为x'_1，x'_2，x'_3。由图4—1，显然有

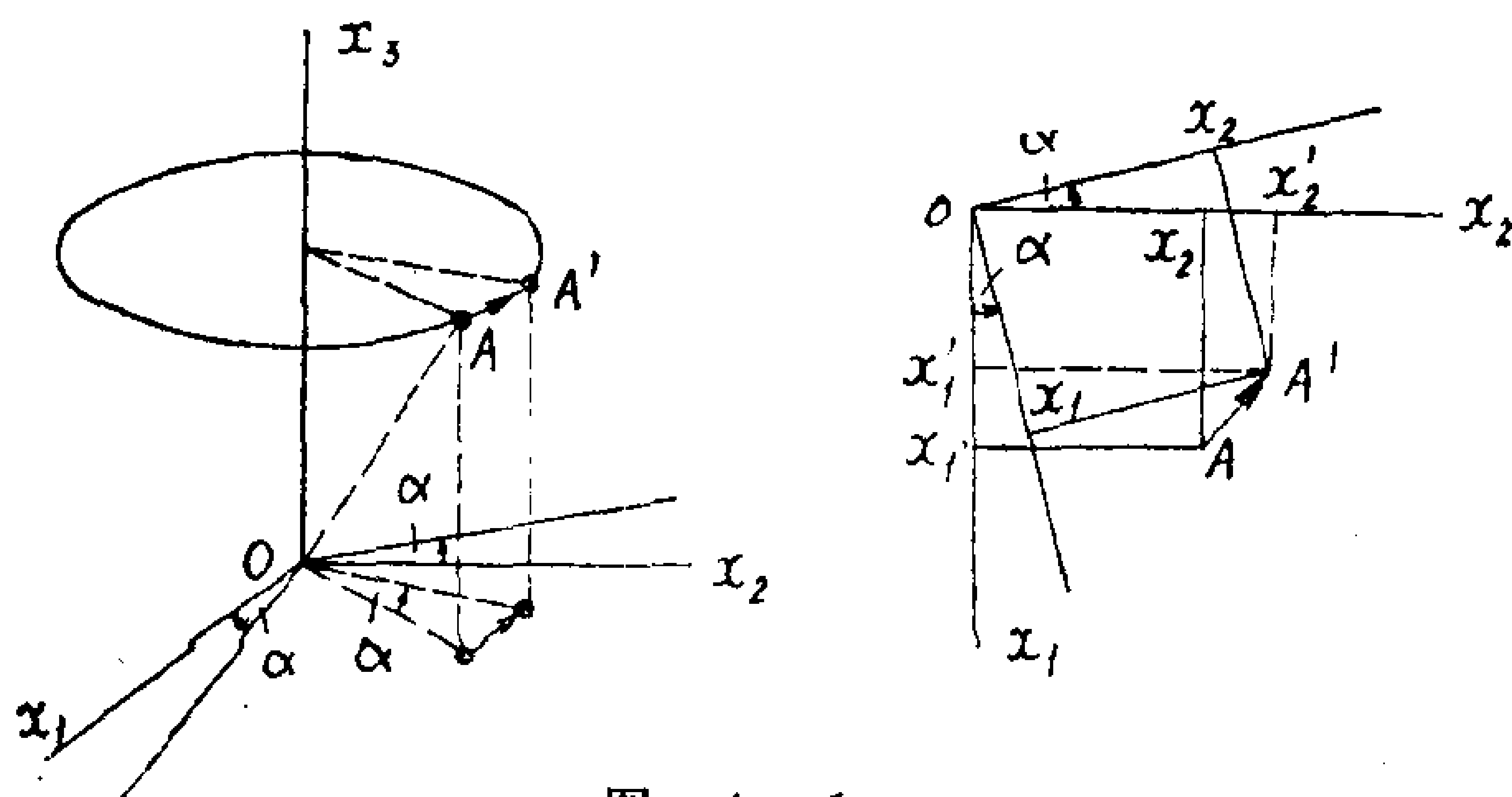


图　4—1

$$x_1' = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha$$
$$x_2' = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \qquad (4-34)$$
$$x_3' = x_3$$

式（4—34）是一个正交仿射变换，是一般仿射变换式（4—23）的特例，称为旋转变换，变换矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4-35)$$

称为旋转算子。

上面的旋转算子是在特殊选择的坐标系中确定的，但是，若把它的分量集合作为特殊坐标系中进行仿射变换的二阶张量，我们就可以利用张量变换的普遍公式得到任意坐标系中旋转算子的分量，或者称为旋转张量，记为$V^i_{\cdot j}$。上述在特殊坐标系（常采用直角笛卡尔坐标系）中建立张量关系式，从而得到任意坐标系中关系式的方法在张量分析、物理、连续介质力学中是常采用的，以后还会遇到。这也是利用张量的优点之一。

旋转变换式（4—34）可以一般地记为

$$x'^i = V^i_{\cdot j} x^j \qquad (4-36)$$

由式（4—34）看出，旋转张量满足式

$$V^i_{\cdot j} V^j_{\cdot k} = \delta^i_k \qquad (4-37)$$

假若前面的点A用向量$\boldsymbol{a}$表示，再取一点B用向量$\boldsymbol{b}$表示，利用旋转张量变换，有

$$a_j' = V^i_{\cdot j} a_i \qquad (4-38)$$
$$b'^l = V^l_{\cdot k} b^k \qquad (4-39)$$

变换后两向量的点积

$$a_j' b'^j = V^i_{\cdot j} V^j_{\cdot k} a_i b^k = \delta^i_k a_i b^k = a_i b^i \qquad (4-40)$$

由此得出结论：由变换式（4—36）所确定的运动，保持两向量的长度及夹角不变，即两向量的点积守恒。亦即由式（4—36）所描述的运动是刚体运动。

下面提出另外一个问题：已知绕定点转动的刚体位移，求相应的旋转算子。为了明确起见，我们假定转动是依次通过绕着过该点的三个坐标轴x_1，x_2，x_3完成的。可以表示为

$$\overset{(1)}{x}{}^{j}=\overset{(0)}{V}{}^{j}_{\cdot i}\overset{(0)}{x}{}^{i}$$
$$\overset{(2)}{x}{}^{k}=\overset{(1)}{V}{}^{k}_{\cdot j}\overset{(1)}{x}{}^{j} \tag{4—41}$$
$$\overset{(3)}{x}{}^{l}=\overset{(2)}{V}{}^{l}_{\cdot k}\overset{(2)}{x}{}^{k}$$

由此

$$\overset{(3)}{x}{}^{l}=\overset{(2)}{V}{}^{l}_{\cdot k}\overset{(1)}{V}{}^{k}_{\cdot j}\overset{(0)}{V}{}^{j}_{\cdot i}\overset{(0)}{x}{}^{i} \tag{4—42}$$

根据仿射变换的群性质，连续数次仿射变换的结果仍是仿射变换，故上式可记为

$$\overset{(3)}{x}{}^{l}=\overset{(3)}{V}{}^{l}_{\cdot i}x^{i} \tag{4—43}$$

式中

$$\overset{(3)}{V}{}^{l}_{\cdot i}=\overset{(2)}{V}{}^{l}_{\cdot k}\overset{(1)}{V}{}^{k}_{\cdot j}\overset{(0)}{V}{}^{j}_{\cdot i} \tag{4—44}$$

从式（4—43）看出，绕着三个轴的连续三次转动相当于绕着某个轴的一次转动，特别值得注意的是，其合成转动不是各分转动之和，而是各旋转张量的连并。

以上所讨论的是有限转动。最后让我们来考察连续介质力学小变形问题最感兴趣的微小转动或无限小转动。

这时，式（4—35）中$\cos\alpha\approx 1$，$\sin\alpha\approx\alpha$，亦即主对角线元素均为1，其它元素直接由转动角表示，且远远小于1。因此一般情形可把旋转张量表为

$$\overset{(3)}{V}{}^{l}_{\cdot i}=\delta^{l}_{i}+\overset{(3)}{\omega}{}^{l}_{\cdot i} \tag{4—45}$$

式中，$\omega^{l}_{\cdot i}$是微小转动角，称为转动分量。

由式（4—44），有

$$\overset{(3)}{V}{}^{l}_{\cdot i}=(\delta^{l}_{k}+\overset{(2)}{\omega}{}^{l}_{\cdot k})(\delta^{k}_{j}+\overset{(1)}{\omega}{}^{k}_{\cdot j})(\delta^{j}_{i}+\overset{(0)}{\omega}{}^{j}_{\cdot i})$$

展开并略去高阶微量后得到

$$\overset{(3)}{V}{}^{l}_{\cdot i}=\delta^{l}_{i}+\sum_{p=0}^{2}\overset{(p)}{\omega}{}^{l}_{\cdot i} \qquad (4-46)$$

代入到式（4—43）后可得

$$\triangle x^{l}=\overset{(3)}{x}{}^{l}-\overset{(0)}{x}{}^{l}=\overset{(3)}{\omega}{}^{l}_{\cdot i}x^{i} \qquad (4-47)$$

式中

$$\overset{(3)}{\omega}{}^{l}_{\cdot i}=\sum_{p=0}^{2}\overset{(p)}{\omega}{}^{l}_{\cdot i} \qquad (4-48)$$

由上面分析我们看到，连续数次无限小转动在刚体上各点产生的位移，其合成旋转算子等于各旋转算子之和。在研究弹性体的刚性转动时我们就应用了这一结论。

第五节　张量分量和物理分量

首先我们看一个简单的例子。在第二章我们把线元向量用式（2—44）表为

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_{i}dx^{i} \qquad (a)$$

式中基向量$\boldsymbol{g}_i$在一般情形下已不是单位向量，而且还可以具有量纲。ds的逆变分量dx^i也不一定具有长度量纲。例如，柱坐标中

$$dx^{1}=dr,\ dx^{2}=d\theta,\ dx^{3}=dz \qquad (b)$$

如果利用单位向量$\boldsymbol{e}_{(i)}$作为基向量，由式（2—41）柱坐标中的线元向量表为

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}_{(i)}dx^{(i)} \qquad (c)$$

这时

$$dx^{(1)}=dr,\ dx^{(2)}=rd\theta,\ dx^{(3)}=dz \qquad (d)$$

对比式（b）和（d），式（d）所表示的分量具有明显的物理意义，都具有长度的量纲，但是一般说来它们并不具有张量性质，称为物量分量，用带一对圆括号的指标表示。在工程中采用物量分量比较直接和方便；式（b）所表示的分量有的已经失去了长度量纲，但是它们具有张量性质，称为张量分量，在张量计

算中采用，工程上应用这些分量就不方便了。那么如何根据张量分量来求出物理分量呢？下面我们就一般地研究这一问题。

我们先研究向量的物理分量。在任意一个曲线坐标系中可以把任何一个向量用基向量表为

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i=v_i\boldsymbol{g}^i \tag{4—49}$$

如果用与$\boldsymbol{g}_i$或$\boldsymbol{g}^i$相一致的单位向量 $e_{(i)}$及 $e^{(i)}$ 表示同一向量，为

$$\boldsymbol{v}=v^{(i)}\boldsymbol{e}_{(i)}=v_{(i)}\boldsymbol{e}^{(i)} \tag{4—50}$$

实际上，因为基向量长度

$$|\boldsymbol{g}_i|=\sqrt{\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_i}=\sqrt{g_{ii}} \tag{4—51}$$

（不求和）

$$|\boldsymbol{g}^i|=\sqrt{\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^i}=\sqrt{g^{ii}} \tag{4—52}$$

所以

$$\boldsymbol{e}_{(i)}=\frac{\boldsymbol{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{4—53}$$

（不求和）

$$\boldsymbol{e}^{(i)}=\frac{\boldsymbol{g}^i}{\sqrt{g^{ii}}} \tag{4—54}$$

由式（4—49），有

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i=\sum_{i=1}^{3}v^i\sqrt{g_{ii}}\left(\frac{\boldsymbol{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}}\right)=\sum_{i=1}^{3}v^i\sqrt{g_{ii}}\,\boldsymbol{e}_{(i)}$$

将该式与式（4—50）对比，得到逆变向量的物理分量，类似地也可以得到协变向量的物理分量，它们是

$$v^{(i)}=v^i\sqrt{g_{ii}} \tag{4—55}$$

（不求和）

$$v_{(i)}=v_i\sqrt{g^{ii}} \tag{4—56}$$

对于正交坐标系

$$v^{(i)}=v_{(i)}=v^i\sqrt{g_{ii}}=\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}}\text{（不求和）}\quad(4-57)$$

类似地分析可以得到二阶张量和高阶张量的物理分量。最方便的办法是利用张量的不变性记法，例如，由式（2—92）中的一个，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=T^{i\cdots j}{}_{k\cdots n}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^n\\&=T^{i\cdots j}{}_{k\cdots n}\sqrt{g_{ii}}\cdots\sqrt{g_{jj}}\sqrt{g^{kk}}\cdots\sqrt{g^{nn}}\\&\quad\cdot\left(\frac{\boldsymbol{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}}\right)\cdots\left(\frac{\boldsymbol{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{g}^k}{\sqrt{g^{kk}}}\right)\cdots\left(\frac{\boldsymbol{g}^n}{\sqrt{g^{nn}}}\right)\\&=T^{i\cdots j}{}_{k\cdots n}\sqrt{g_{ii}}\cdots\sqrt{g_{jj}}\sqrt{g^{kk}}\cdots\sqrt{g^{nn}}\\&\quad\cdot\boldsymbol{e}_{(i)}\cdots\boldsymbol{e}_{(j)}\boldsymbol{e}^{(k)}\cdots\boldsymbol{e}^{(n)}\end{aligned}$$

（$\sqrt{g_{ii}}$…不求和，随$T^{i\cdots j}{}_{k\cdots n}$或$\boldsymbol{g}_i$…的相应指标取值）

所以

$$T^{(i)\cdots(j)}{}_{(k)\cdots(n)}=T^{i\cdots j}{}_{k\cdots n}\sqrt{g_{ii}\cdots g_{jj}g^{kk}\cdots g^{nn}}$$

（不求和）　　　　（4—58）

例如，正交坐标系中，二阶张量的物理分量可以表为

$$T^{(i)(i)}=T_{(i)(i)}=T^{ii}g_{ii}=\frac{T_{ii}}{g_{ii}}\text{（不求和）}$$

（4—59）

$$T^{(i)(j)}=T_{(i)(j)}=T^{ij}\sqrt{g_{ii}g_{jj}}=\frac{T_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}$$

（不求和，$i\neq j$）

例题1　第二章第三节例题8求出向量$\boldsymbol{P}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$在极坐标中的分量 $P^r=2\cos\theta+3\sin\theta$，$P^\theta=-\dfrac{2\sin\theta}{r}+\dfrac{3\cos\theta}{r}$，这是张量分量，试求出物理分量。

由式（4—57），有

$$\begin{aligned}P_{(r)}&=P^r\sqrt{g_{rr}}\\P_{(\theta)}&=P^\theta\sqrt{g_{\theta\theta}}\end{aligned}\quad(a')$$

在第三章第一节例题1已求得$g_{rr}=1$，$g_{\theta\theta}=r^2$，于是

$$P_{(r)}=P^r=2\cos\theta+3\sin\theta$$

$$P_{(\theta)} = P^{\theta} r = -2\sin\theta + 3\cos\theta \qquad (b')$$

例题 2 第二章第四节例题 3 的式（c'）已求得极坐标和直角坐标间的应力转轴公式

$$\sigma_{rr} = \cos^2\theta\sigma_x + \sin^2\theta\sigma_y + 2\sin\theta\cos\theta\tau_{xy}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^2\sin^2\theta\sigma_x + r^2\cos^2\theta\sigma_y - 2r^2\sin\theta\cos\theta\tau_{xy}$$

$$\sigma_{r\theta} = -r\sin\theta\cos\theta\sigma_x + r\sin\theta\cos\theta\sigma_y + r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\tau_{xy}$$

试将极坐标表示的分量化为物理分量形式。

利用式（4—59），并注意$g_{rr}=1$，$g_{\theta\theta}=r^2$，则可求得

$$\sigma_r = \sigma_{(r)(r)} = \cos^2\theta\sigma_x + \sin^2\theta\sigma_y + 2\sin\theta\cos\theta\tau_{xy}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{(\theta)(\theta)} = \sin^2\theta\sigma_x + \cos^2\theta\sigma_y - 2\sin\theta\cos\theta\tau_{xy}$$

$$\tau_{r\theta} = \sigma_{(r)(\theta)} = -\sin\theta\cos\theta(\sigma_x - \sigma_y) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\tau_{xy}$$

这正是通常在弹性力学里所熟知的应力转轴公式。

第五章 张 量 分 析

第一节 克里斯托夫（Christoffel）符号及其性质。短程线

一、克里斯托夫符号

1. 直角坐标系（笛卡尔直角和斜角坐标系）中向量的微分。

任意一向量$\boldsymbol{u}$用协变分量表示为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}^i u_i \quad (a)$$

在直线坐标系中基向量$\boldsymbol{g}^i$是常量，所以向量$\boldsymbol{u}$的微分为

$$d\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}^i\frac{\partial u_i}{\partial x^j}dx^j=u_{i,j}dx^j\boldsymbol{g}^i \quad (5-1)$$

展开后得到

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{u}=&\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial u_1}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial u_1}{\partial x^3}dx^3\right)\boldsymbol{g}^1\\&+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial u_2}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial u_2}{\partial x^3}dx^3\right)\boldsymbol{g}^2\\&+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial u_3}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial u_3}{\partial x^3}dx^3\right)\boldsymbol{g}^3\end{aligned} \quad (5-1')$$

由此看出，在直线坐标系里，向量的微分仅取决于它的分量的微分，与基向量无关。

2. 曲线坐标系中向量的导数。克里斯托夫符号。

为了简单起见，我们考察极坐标中向量的微分，它不同于上面所讨论的情况。这可由图5—1给以形象说明。

图5—1（a）表示的是沿同一圆周上每点作用大小和方向都完全相同的向量，然而随着坐标位置的改变向量的径向分量和

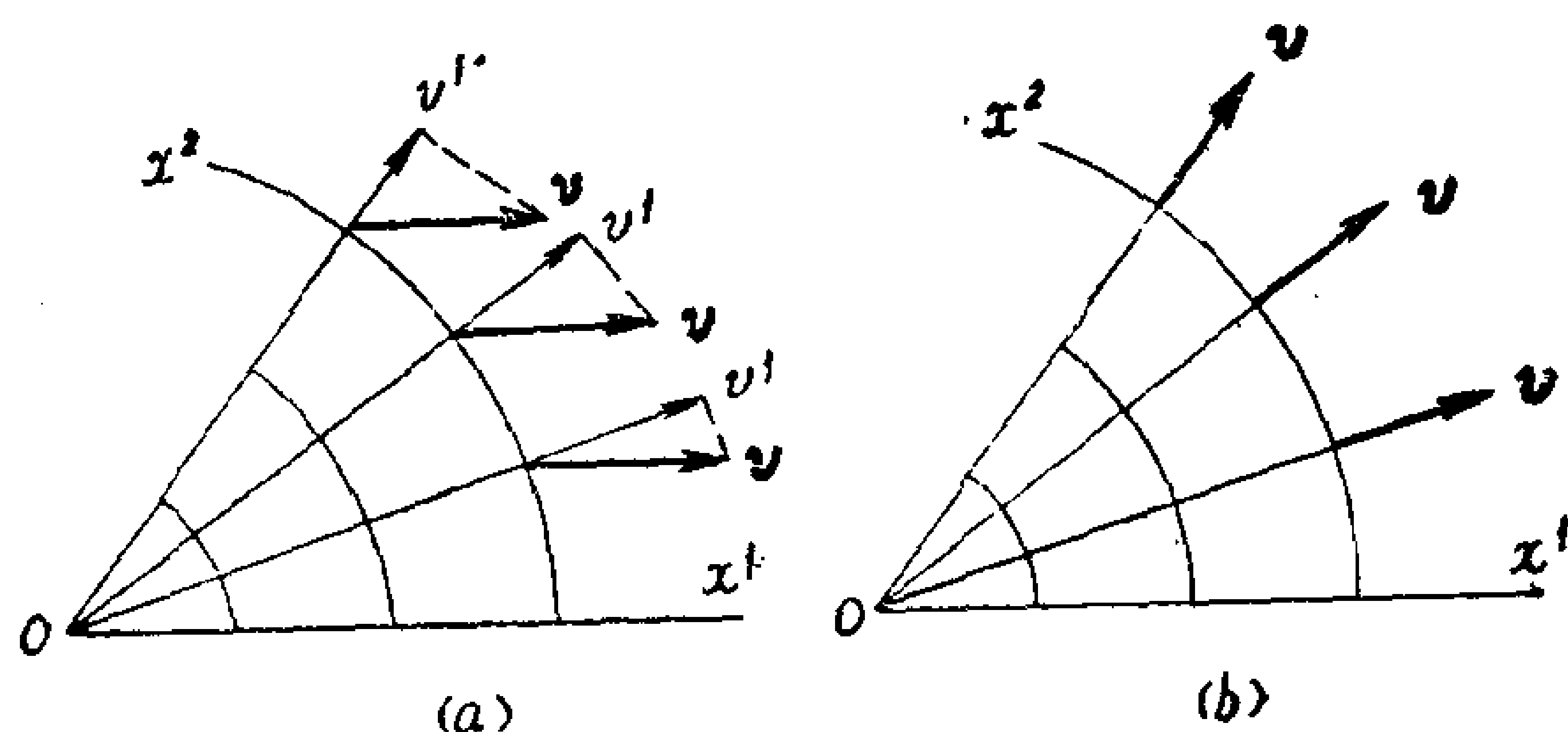


图 5—1

环向分量都在变化。图5—1（b）表示的是沿同一圆周上每点都作用大小相等方向与向径一致的向量，随着坐标位置的变化向量产生增量，但是向量的径向分量和环向分量都没有变化。

之所以会出现上述这种情况，是因为随着坐标位置的改变基向量发生了变化，它不是常量，因此在求向量导数时必须给以考虑。一般情形，向量导数表示为

$$\boldsymbol{v}_{,j}=(v^i\boldsymbol{g}_i)_{,j}=v^i_{,j}\boldsymbol{g}_i+v^i\boldsymbol{g}_{i,j} \qquad (5-2)$$

或

$$\boldsymbol{v}_{,j}=(v_i\boldsymbol{g}^i)_{,j}=v_{i,j}\boldsymbol{g}^i+v_i\boldsymbol{g}^i_{,j} \qquad (5-3)$$

注意上二式中最后一项是基向量的导数。因为向量的导数仍是向量，所以可以把基向量的导数再用基向量表示。这里首先讨论协变基向量的导数$\boldsymbol{g}_{i,j}$。令

$$\boldsymbol{g}_{i,j}=\Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^k=\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k \qquad (5-4)$$

式中，Γ_{ijk}、Γ^k_{ij}——克里斯托夫符号。前者为第一类克里斯托夫符号，后者为第二类克里斯托夫符号。如果用互逆基向量点乘上式，可得

$$\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l\cdot\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ijl}\delta^l_k=\Gamma_{ijk} \qquad (5-5)$$

及

$$\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}^k=\Gamma^l_{ij}\boldsymbol{g}_l\cdot\boldsymbol{g}^k=\Gamma^l_{ij}\delta^k_l=\Gamma^k_{ij} \qquad (5-6)$$

也可以用式（5—5）、（5—6）直接定义克里斯托夫符号。在上面诸式中用了张量记法，但这不意味着Γ_{ijk}、Γ^k_{ij}就是张量，随后的分析将证明它们不是张量。

二、克里斯托夫符号的性质

1. 克里斯托夫符号第三个指标的上升和下降与向量相同。

这一点可以由式（5—4）的定义直接看出，第三个指标是作为向量的分量而出现的。

用$\boldsymbol{g}_l$点乘式（5—4）最后等式的两边，得

$$\Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}_l=\Gamma_{ij}^{\ \ k}\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}_l$$

注意到$\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}_l=\delta^k_l$，$\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}_l=g_{kl}$，则由上式得

$$\Gamma_{ijl}=\Gamma_{ij}^{\ \ k}g_{kl} \qquad (5-7)$$

用$\boldsymbol{g}^l$点乘式（5—4）最后等式的两边

$$\Gamma_{ijk}g^{kl}=\Gamma_{ij}^{\ \ l} \qquad (5-8)$$

从上二式看到，克里斯托夫符号的第三个指标与向量的分量一样的上升或下降。然而，另外两个指标并非如此，后面将会看到克里斯托夫符号不能像三阶张量那样进行变换，换句话说，它不是三阶张量。

2. 克里斯托夫符号关于头两个指标是对称的。

由式（2—46），基向量表为

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial r}{\partial x^i}=\boldsymbol{r}_{,i} \qquad (b)$$

根据微分算子的可交换性$\dfrac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^1}$，由上式有

$$\boldsymbol{g}_{i,j}=\boldsymbol{r}_{,ij}=\boldsymbol{r}_{,ji}=\boldsymbol{g}_{j,i} \qquad (5-9)$$

应用式（5—4）的定义，由上式可以分别得到

$$\Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l=\Gamma_{jil}\boldsymbol{g}^l \qquad (c)$$

及

$$\Gamma_{ij}^{\ \ l}\boldsymbol{g}_l=\Gamma_{ji}^{\ \ l}\boldsymbol{g}_l \qquad (d)$$

将式（c）点乘$\boldsymbol{g}_k$，式（d）点乘$\boldsymbol{g}^k$，分别得到

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{jik} \qquad (5-10)$$

及

$$\Gamma_{ij}^{\ \ k}=\Gamma_{ji}^{\ \ k} \qquad (5-11)$$

3. 克里斯托夫符号不是张量。

由式（5—5）、（5—9）、（b），克里斯托夫符号可

以表示为

$$\Gamma_{ijk}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^i \partial x^j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k} \tag{e}$$

在另外一坐标系中克里斯托夫符号为$\Gamma_{i'j'k'}$，于是

$$\begin{aligned}\Gamma_{i'j'k'}&=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{k'}}\\
&=\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{j'}}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{k'}}\\
&=\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{j}}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{k}}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\\
&=\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^i\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\right.\\
&\quad\left.\cdot\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\\
&=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^i\partial x^j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\\
&\quad+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\end{aligned}$$

注意到式（2—60）、（e）、（b），上式可写为

$$\Gamma_{i'j'k'}=\Gamma_{ijk}\beta^i_{i'}\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}+g_{jk}\beta^k_{k'}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} \tag{5—12}$$

式（5—12）是Γ_{ijk}的变换律，由该式看到，由于多出了最后一项，使得在坐标变换中Γ_{ijk}不满足张量的变换关系，这就证明了克里斯托夫符号不是张量。

为了求得第二类克里斯托夫符号的变换律，将式（5—12）两边乘以$g^{k'l'}=\beta^{k'}_m\beta^{l'}_l g^{ml}$，得

$$\begin{aligned}\Gamma_{i'j'k'}g^{k'l'}&=\Gamma_{ijk}g^{ml}\beta^i_{i'}\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}\beta^{k'}_m\beta^{l'}_l\\
&\quad+g_{jk}g^{ml}\beta^k_{k'}\beta^{k'}_m\beta^{l'}_l\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\\
&=\Gamma_{ijk}g^{ml}\beta^i_{i'}\beta^j_{j'}\delta^k_m\beta^{l'}_l+g_{jk}g^{ml}\delta^k_m\beta^{l'}_l\cdot\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\end{aligned}$$

$$=\Gamma_{ijk}g^{kl}\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}\beta^{l'}_{l}+g_{jk}g^{kl}\beta^{l'}_{l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}$$

由式（5－8）及$g_{jk}g^{kl}=\delta^l_j$，由上式得

$$\Gamma_{i'j'}^{l'}=\Gamma_{ij}^{l}\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}\beta^{l'}_{l}+\beta^{l'}_{l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} \quad (5－13)$$

由该式看出，第二类克里斯托夫符号也不是张量。

三、克里斯托夫符号的计算

由已知公式

$$g_{ij}=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j \quad (f)$$

对x^k求导数，得

$$g_{ij,k}=\boldsymbol{g}_{i,k}\cdot\boldsymbol{g}_j+\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_{j,k} \quad (g)$$

注意到式（5－5），有

$$g_{ij,k}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki} \quad (5－14)$$

将上式轮换字母并利用克里斯托夫前二指标的对称性可得到另外二式，与上式一并写出：

$$\begin{aligned}
\Gamma_{kij}+\Gamma_{jki}\qquad\quad &=g_{ij,k}\\
\Gamma_{kij}\qquad\quad+\Gamma_{ijk}&=g_{jk,i}\\
\Gamma_{jki}+\Gamma_{ijk}&=g_{ki,j}
\end{aligned}$$

将上边三式的后二式相加再减去第一式，得

$$2\Gamma_{ijk}=g_{jk,i}+g_{ki,j}-g_{ij,k} \quad (5－15)$$

或写为

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \quad (5－15')$$

式（5－15′）常用来作为计算克里斯托夫符号的公式。它指出，虽然Γ_{ijk}不是张量，但是可以由度量张量的导数直接表示。所以，只要度量张量已经求得，Γ_{ijk}的27个分量就能计算出来，然后可通过式（5－7）计算Γ_{ij}^{k}。

对于正交坐标系，由于$g_{ij}=0$（$i\neq j$），式（5－15′）可以简化为

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{iii}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}$$

（当 $i=j=k$ 时）

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{iik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}$$

（当 $i=j\neq k$ 时）　（5—16）

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{iji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$$

（当 $i=k\neq j$ 时）

$\Gamma_{ijk}=0$（当 i，j，k 各不相同时）

（在以上各式中均不求和）

同时，利用式（5—8）并注意到正交坐标系中 $g^{ii}=\dfrac{1}{g_{ii}}$（不求和），$g^{ij}=0$（$i\neq j$），可以得到第二类克里斯托夫符号的简化形式，为

$$\Gamma^l_{ij}=\Gamma^i_{ii}=\frac{\Gamma_{iii}}{g_{ii}}=\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\ln g_{ii}$$

（当 $i=j=l$ 时）　（5—17）

$$\Gamma^l_{ij}=\Gamma^l_{ii}=\frac{\Gamma_{iil}}{g_{ll}}=-\frac{1}{2g_{ll}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^l}$$

（当 $i=j\neq l$ 时）

$$\Gamma^l_{ij}=\Gamma^i_{ij}=\frac{\Gamma_{iji}}{g_{ii}}=\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\ln g_{ii}$$

（当 $i=l\neq j$ 时）

$\Gamma^l_{ij}=0$（当 i，j，l 不相同时）

（在以上各式中均不求和）

例题1　试证明

$$g^{ij}_{;k}=-\Gamma^j_{mk}g^{im}-\Gamma^i_{nk}g^{jn}$$

由式 $g^{im}g_{mn}=\delta^i_n$，对 x^k 求导数有

$$g^{im}_{,k}g_{mn}+g^{im}g_{mn,k}=0 \qquad (a')$$

或

$$g^{im}_{,k}g_{mn}=-g_{mn,k}g^{im} \qquad (b')$$

在式（b'）两边乘以g^{nj}，得

$$g^{i\ m}_{\ ;k}g_{mn}g^{nj}=-g_{mn;k}g^{im}g^{nj} \qquad (c')$$

注意到$g_{mn}g^{nj}=\delta^j_m$，$g^{i\ m}_{\ ;k}\delta^j_m=g^{i\ j}_{\ ;k}$，$g^{nj}=g^{jn}$以及式（5—14），上式变为

$$g^{i\ j}_{\ ;k}=-(\Gamma_{mkn}+\Gamma_{nkm})g^{im}g^{jn} \qquad (d')$$

将式右边乘开，并利用式（5—8），最后得

$$g^{i\ j}_{\ ;k}=-\Gamma_{mk}^{\ \ j}g^{im}-\Gamma_{nk}^{\ \ i}g^{jn} \qquad (e')$$

例题 2　求直线坐标系（直角和斜角笛卡尔坐标系）中的克里斯托夫符号。

由第三章第一节知道，在直角或斜角笛卡尔坐标系中度量张量g_{ij}的所有分量都是常数。根据公式（5—15′）有

$$\Gamma_{ijk}=0 \qquad (a')$$

再由式（5—8），得

$$\Gamma_{ij}^{\ \ k}=0 \qquad (b')$$

即在直线坐标系中，克里斯托夫符号的全部分量为零。

上面的结论从另一个角度说明克里斯托夫符号不是张量，因为如是张量它就应在任何其它坐标系中都为零。

例题 3　求极坐标中的克里斯托夫符号。

在第三章例题 1 已求得极坐标的度量张量：$g_{rr}=g_{11}=1$，$g_{\theta\theta}=g_{22}=r^2$，$g_{r\theta}=g_{12}=0$，$g_{\theta r}=g_{21}=0$。由式（5—15′）并注意到克里斯托夫符号关于前两个指标的对称性，求得

$$\Gamma_{rrr}=\Gamma_{111}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)=0$$

$$\Gamma_{rr\theta}=\Gamma_{112}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)=0$$

$$\Gamma_{r\theta r}=\Gamma_{\theta rr}=\Gamma_{121}=\Gamma_{211}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}\right)=0 \qquad (a')$$

$$\Gamma_{r\theta\theta}=\Gamma_{\theta r\theta}=\Gamma_{122}=\Gamma_{212}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}\right.$$

$$-\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}\Big) = r$$

$$\Gamma_{\theta\theta r} = \Gamma_{221} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = -r$$

$$\Gamma_{\theta\theta\theta} = \Gamma_{222} = 0$$

二维问题只有八个分量，利用式（5－8）并注意到极坐标中的逆变度量张量 $g^{rr}=1$，$g^{\theta\theta}=\frac{1}{r^2}$，$g^{r\theta}=g^{\theta r}=0$（见第三章例题1），求得

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \Gamma^1_{22} = \Gamma_{221}g^{11} = -r$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma_{122}g^{22} = 1/r \tag{b'}$$

其余分量为零。对于柱坐标每类克里斯托夫符号有27个分量，但是也只有$\Gamma_{r\theta\theta}=\Gamma_{\theta r\theta}=r$，$\Gamma_{\theta\theta r}=-r$，及$\Gamma^r_{\theta\theta}=-r$，$\Gamma^\theta_{\theta r}=\Gamma^\theta_{r\theta}=1/r$，其余分量均为零。

例题 4　试求球坐标系中的克里斯托夫符号。

在球坐标系中，$x'=r$，$x^2=\theta$，$x^3=\varphi$。根据第三章第一节的例题2有：$g_{rr}=g_{11}=1$，$g_{\theta\theta}=g_{22}=r^2\cos^2\varphi$，$g_{\varphi\varphi}=g_{33}=r^2$，$g_{r\theta}=g_{\theta\varphi}=g_{r\varphi}=0$。由式（5—16）、（5—17）知，仅当$i=2$，3时才有不为零的克里斯托夫符号。它们是

$$\Gamma_{221} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -r\cos^2\varphi$$

$$\Gamma_{223} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = r^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\Gamma_{331} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -r$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{122} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = r\cos^2\varphi \tag{a'}$$

$$\Gamma_{232} = \Gamma_{322} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = -r^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\Gamma_{313} = \Gamma_{133} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = r$$

以及

$$\Gamma^{1}_{22}=-r\cos^{2}\varphi$$
$$\Gamma^{3}_{22}=\cos\varphi\sin\varphi$$
$$\Gamma^{1}_{33}=-r$$

(b')

$$\Gamma^{2}_{21}=\Gamma^{2}_{12}=\frac{1}{r}$$
$$\Gamma^{2}_{32}=\Gamma^{2}_{23}=-\text{tg}\,\varphi$$
$$\Gamma^{3}_{31}=\Gamma^{3}_{13}=\frac{1}{r}$$

例题 5 试证明：

$$\Gamma^{i}_{im}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{m}}\text{或}\Gamma^{i}_{im}=\frac{\partial}{\partial x^{m}}\ln\sqrt{g} \qquad (a')$$

将度量张量行列式g按余子式$G(j,k)$展开，得

$$g=g_{jk}G(j,k)\ \text{（仅对}\ k\ \text{求和）} \qquad (b')$$

因为$G(j,k)$里不含g_{jk}，所以有

$$\frac{\partial g}{\partial g_{jr}}=G(j,r)$$

于是

$$\frac{\partial g}{\partial x^{m}}=\frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^{m}}=G(j,r)\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^{m}}=gg^{jr}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^{m}}$$
$$=gg^{jr}(\Gamma_{jmr}+\Gamma_{rmj})=g(\Gamma^{j}_{jm}+\Gamma^{r}_{rm})$$
$$=2g\Gamma^{j}_{jm} \qquad (c')$$

在上面的推导中用到了式（3—13），（5—14）及（5—8）的关系。由式（c'），有

$$\Gamma^{i}_{im}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{m}} \qquad (d')$$

或

$$\Gamma^{i}_{im}=\frac{\partial}{\partial x^{m}}\ln\sqrt{g} \qquad (e')$$

或

$$\Gamma^{i}_{im}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{m}} \qquad (f')$$

四、短 程 线

众所周知，在一个平面上，两点间直线距离最短。如果是曲面也可以提出相同的问题，即在一个曲面上连接两点的最短路程线是什么？这就是所谓的短程线问题。它是泛函分析中一个著名的变分问题。

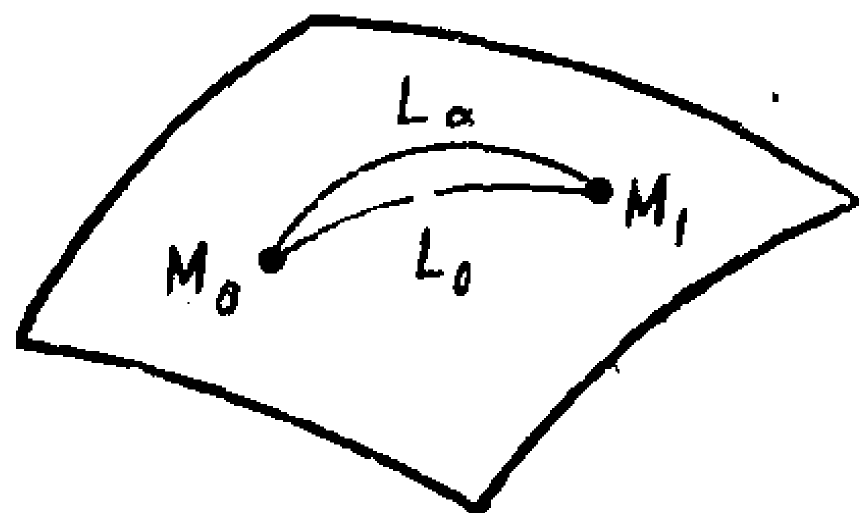


图 5—2

设曲面上有任意曲线L_α，如图5—2，现以某参数t表示坐标的参数方程，为

$$x^1=x^1(t),\quad x^2=x^2(t) \qquad (a)$$

在曲线L上取两点M_0和M_1，对应的参数为t_0和t_1。现计算曲线上M_0和M_1两点间的一段曲线长度l。

式（3—15）已给出线元微分弧长公式，为

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j \qquad (b)$$

注意到式（a）有

$$dx^1=\frac{dx^1}{dt}dt,\quad dx^2=\frac{dx^2}{dt}dt \qquad (c)$$

若引用记号

$$\dot{x}^1=\frac{dx^1}{dt},\qquad \dot{x}^2=\frac{dx^2}{dt} \qquad (d)$$

则有

$$ds=\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dt \qquad (e)$$

所以

$$l=\int_{t_0}^{t_1}ds=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dt \qquad (5—18)$$

令

$$F\left(x^1,\ x^2;\ \frac{dx^1}{dt},\ \frac{dx^2}{dt}\right)=g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \qquad (f)$$

则式（5—18）变为

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{F\left(x^1,\ x^2;\ \frac{dx^1}{dt},\ \frac{dx^2}{dt}\right)}dt \tag{5—18′}$$

显然，通过M_0和M_1点可以连接许多不同的曲线，具有不同的长度l。若有一曲线，其上任意足够接近两点间线段的长比连接此两点的任何邻近曲线都短，则称为短程线。

下面用变分方法建立短程线的方程式。

为方便计，把参数t取为曲线上由M_0点算起的弧长s。设L_0是短程线，其上的坐标

$$x_0^1=x_0^1(s),\quad x_0^2=x_0^2(s) \tag{g}$$

是使式（5—18′）取得极小值问题的解。令极小值为l_0,在L_0上参数s在M_0和M_1点的值分别为$s=0$和$s=l_0$。

现取两个s的任意函数$\eta^1(s)$，$\eta^2(s)$，并使之满足如下条件：

$$\begin{aligned}&\eta^1(0)=\eta^1(l_0)=0\\&\eta^2(0)=\eta^2(l_0)=0\end{aligned} \tag{h}$$

这样，凡通过M_0点、M_1点的，与短程线相邻近的曲线，用L_α表示，如图5—2，其上的坐标x^1，x^2可以表为

$$\begin{aligned}&x^1=x_0^1(s)+\alpha\eta^1(s)\\&x^2=x_0^2(s)+\alpha\eta^2(s)\end{aligned} \tag{i}$$

式中，α是一个微小的可正可负的参数。实际上，取不同的α值，上式就代表不同的与L_0邻近的曲线。于是，L_α上M_0与M_1间的曲线长$l(\alpha)$，由式（5—18′）可以表为

$$l(\alpha)=\int_0^{l_0}\left[F\left(x_0^1+\alpha\eta^1,\ x_0^2+\alpha\eta^2;\ \frac{dx_0^1}{ds}+\alpha\frac{d\eta^1}{ds},\ \frac{dx_0^2}{ds}+\alpha\frac{d\eta^2}{ds}\right)\right]^{\frac{1}{2}}ds \tag{j}$$

当$\alpha=0$时得曲线L_0的弧长l_0，比任何邻近曲线L_α上的弧长

$l(\alpha)$ 都小，即当$\alpha=0$时，作为α函数的$l(\alpha)$必存在有极小值。根据函数存在极小值的必要条件——该函数在极小值这一点的导数等于零，必有

$$\left[\frac{dl(\alpha)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}=0 \qquad (k)$$

把式（j）中积分号内的函数看作是α 的函数，求导数后代入 $\alpha=0$，得

$$\left[\frac{dl(\alpha)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}=\int_0^{l_0}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{F\left(x_0^1;\ x_0^2;\ \dfrac{dx_0^1}{ds},\ \dfrac{dx_0^2}{ds}\right)}}\cdot\left\{\frac{\partial F}{\partial x_0^i}\eta^i(s)+\frac{\partial F}{\partial\dfrac{dx_0^i}{ds}}\frac{d\eta^i}{ds}\right\}ds \qquad (l)$$

注意到，参数由s代替t后，式（f）变为

$$F\left(x^1,\ x^2;\ \frac{dx^1}{ds},\ \frac{dx^2}{ds}\right)=g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \qquad (m)$$

在L_0（取$\alpha=0$）上，由式（b）有

$$F\left(x_0^1,\ x_0^2;\ \frac{dx_0^1}{ds},\ \frac{dx_0^2}{ds}\right)=g_{ij}\frac{dx_0^i}{ds}\frac{dx_0^j}{ds}=1 \qquad (n)$$

因此，由式（l），（k）得

$$\int_0^{l_0}\frac{\partial F}{\partial x_0^i}\eta^i(s)ds+\int_0^{l_0}\frac{\partial F}{\partial\dfrac{dx_0^i}{ds}}\frac{d\eta^i}{ds}ds=0 \qquad (o)$$

对该等式左边第二项应用分部积分法，并注意到式（h）的条件，得

$$\int_0^{l_0}\frac{\partial F}{\partial\dfrac{dx_0^i}{ds}}\frac{d\eta^i}{ds}ds=\left[\frac{\partial F}{\partial\dfrac{dx_0^i}{ds}}\eta^i\right]_{s=0}^{s=l_0}-\int_0^{l_0}\eta^i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial\dfrac{dx_0^i}{ds}}\right)ds$$

$$= -\int_0^{l_0} \eta^i \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \frac{dx_0^i}{ds}}\right) ds$$

于是式（o）变为

$$\int_0^{l_0} \eta^i \left[\frac{\partial F}{\partial x_0^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \frac{dx_0^i}{ds}}\right)\right] ds = 0 \qquad (p)$$

由于函数η^i的任意性，要上式成立，必须

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \frac{dx^i}{ds}}\right) = 0 \qquad (q)$$

这实际上就是变分学中的欧拉方程式。在二维曲面上，取 $i=1$，2，式（q）表示两个偏微分方程式。式中去掉了 x 的下标 0，这不影响问题的本质。

现在也可以这样定义短程线，即凡满足方程式（q）的线称为短程线。为了由式（q）得到x^i的方程式，应用式（m）将方程式（q）的左边展开。

首先，将式（m）两边对$\frac{dx^i}{ds}$求导，得

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{dx^i}{ds}} = 2g_{ij}\frac{dx^j}{ds}$$

于是有

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \frac{dx^i}{ds}}\right) = 2g_{ij}\frac{d^2x^j}{ds^2} + 2\frac{dg_{ij}}{ds}\frac{dx^j}{ds} \qquad (r)$$

协变度量张量$g_{ij}(x^1, x^2)$对 s 的导数

$$\frac{dg_{ij}}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \frac{dg_{ik}}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

$$\frac{dg_{ij}}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \frac{dg_{il}}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}$$

将此二式相加并代入式（r），得

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{dx^i}{ds}}\right)=2g_{ij}\frac{d^2x^j}{ds^2}+\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\right)\cdot\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} \qquad (s)$$

最后，将式（m）写为

$$F=g_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}$$

很容易求得

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} \qquad (t)$$

将式（s），（t）代入式（g），得

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{ds^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right]\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}=0 \qquad (5—19)$$

注意到式（5—15′）的克里斯托夫符号，上式可以写为

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{ds^2}+\Gamma_{kli}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}=0 \qquad (5—19')$$

式（5—19）或（5—19′）就是短程线的微分方程式。将式（5—19′）各项乘以g^{im}，并注意到$g_{ij}g^{im}=\delta_j^m$及式（5—8），上式又可以写为

$$\frac{d^2x^m}{ds^2}+\Gamma^m_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}=0 \qquad (5—19'')$$

上面的推导是在曲面上进行的。三维欧氏空间的曲面是一个二维的黎曼空间*)。实际上，上面公式对于n维的黎曼空间也是成立的，只需将式中的指标从1取到n。

第二节　协　变　导　数

一、向量的协变导数

第一节已把协变基向量的导数表为

*）黎曼空间的定义见本章第三节。

$$\boldsymbol{g}_{i,j}=\Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^{k}=\Gamma^{k}_{ij}\boldsymbol{g}_{k}$$

现在推导逆变基向量的导数。类似于式（5—4），也可以把逆变基向量的导数 $\boldsymbol{g}^{i}_{,j}$ 再用逆变基向量表示，暂设其分量为 $\hat{\Gamma}^{i}_{jl}$，于是

$$\boldsymbol{g}^{i}_{,j}=\hat{\Gamma}^{i}_{jl}\boldsymbol{g}^{l} \qquad (a)$$

将上式两边点乘以 $\boldsymbol{g}_{k}$，得

$$\boldsymbol{g}^{i}_{,j}\cdot\boldsymbol{g}_{k}=\hat{\Gamma}^{i}_{jl}\boldsymbol{g}^{l}\cdot\boldsymbol{g}_{k}=\hat{\Gamma}^{i}_{jk} \qquad (b)$$

又由 $\boldsymbol{g}^{i}\cdot\boldsymbol{g}_{k}=\delta^{i}_{k}$，将其两边对 x^{j} 取导数得

$$\boldsymbol{g}^{i}_{,j}\cdot\boldsymbol{g}_{k}+\boldsymbol{g}^{i}\cdot\boldsymbol{g}_{k,j}=0$$

或

$$\boldsymbol{g}^{i}_{,j}\cdot\boldsymbol{g}_{k}=-\boldsymbol{g}^{i}\cdot\boldsymbol{g}_{k,j} \qquad (c)$$

将式（5—4）代入上式，得

$$\boldsymbol{g}^{i}_{,j}\cdot\boldsymbol{g}_{k}=-\boldsymbol{g}^{i}\Gamma^{m}_{kj}\boldsymbol{g}_{m}=-\Gamma^{m}_{kj}\delta^{i}_{m}=-\Gamma^{i}_{jk} \qquad (d)$$

对比式（b）和（d），显然有

$$\hat{\Gamma}^{i}_{jk}=-\Gamma^{i}_{jk} \qquad (e)$$

于是式（a）将变为

$$\boldsymbol{g}^{i}_{,j}=-\Gamma^{i}_{jk}\boldsymbol{g}^{k} \qquad (5—20)$$

下面引出协变导数的概念。

利用克里斯托夫符号和式（5—4），向量的导数公式（5—2）可以表为

$$\boldsymbol{v}_{,j}=v^{i}_{,j}\boldsymbol{g}_{i}+v^{i}\Gamma^{k}_{ij}\boldsymbol{g}_{k} \qquad (f)$$

变换最后一项的哑标记号后上式变为

$$\boldsymbol{v}_{,j}=(v^{i}_{,j}+v^{k}\Gamma^{i}_{jk})\boldsymbol{g}_{i} \qquad (5—21)$$

引用记号

$$v^{i}|_{j}=v^{i}_{,j}+v^{k}\Gamma^{i}_{jk} \qquad (5—22)$$

式中　$v^{i}_{,j}$——向量 v^{i} 的普通导数；

$v^{i}|_{j}$——向量 v^{i} 的协变导数。符号 $|_{j}$ 表示对 x^{j} 的协变导数。

必须注意，向量分量的普通导数 $v^{i}_{,j}$ 与向量分量的协变导数 $v^{i}|_{j}$ 是不同的，二者相差一项 $v^{k}\Gamma^{i}_{jk}$，且具有完全不同的性质。

稍后将证明，$v^i|_j$是张量，而 $v^i_{,j}$ 不是张量，后者的非张量性质由克里斯托夫符号的非张量性质得到补偿。

类似地，式（5—3）可以写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{,j} &= v_{i,j}\boldsymbol{g}^i + v_i\boldsymbol{g}^i_{,j}\\ &= v_{i,j}\boldsymbol{g}^i - v_i\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{g}^k\\ &= (v_{i,j} - v_k\Gamma^k_{ij})\boldsymbol{g}^i\end{aligned} \qquad (5—23)$$

引用记号

$$v_i|_j = v_{i,j} - v_k\Gamma^k_{ij} \qquad (5—24)$$

式中 $v_{i,j}$——向量v_i的普通导数；

$v_i|_j$——向量v_i的协变导数。

利用式（5—22）、（5—24），向量导数公式（5—21）、（5—23）分别表为

$$\boldsymbol{v}_{,j} = v^i|_j\boldsymbol{g}_i$$

$$(5—25)$$

及

$$\boldsymbol{v}_{,j} = v_i|_j\boldsymbol{g}^i$$

因此，向量的导数$\boldsymbol{V}_{,j}$仍然是向量，对于固定的 j，它的逆变分量是协变导数$v^i|_j$，它的协变分量是协变导数$v_i|_j$。

关于协变导数我们指出以下几点性质：

1. 向量的协变导数是二阶张量。

首先证明 $v_k|_j$ 是二阶张量的协变分量。由$\boldsymbol{v}= v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}$对$x^{j'}$求导数得

$$\boldsymbol{v}_{,j'} = v_{i',j'}\boldsymbol{g}^{i'} + v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}_{,j'} = v_{i'}|_{j'}\boldsymbol{g}^{i'} \qquad (g)$$

另一方面，根据微分的链式法则，有

$$\boldsymbol{v}_{,j'} = \boldsymbol{v}_{,j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = v_i|_j\boldsymbol{g}^i\beta^j_{j'} \qquad (h)$$

由式（g），（h）有

$$v_{i'}|_{j'}\boldsymbol{g}^{i'} = v_i|_j\boldsymbol{g}^i\beta^j_{j'} \qquad (i)$$

用基向量$\boldsymbol{g}_{k'} = \beta^h_{k'}\boldsymbol{g}_h$点乘等式两边，注意到左边变为$v_{i'}|_{j'}\boldsymbol{g}^{i'}\cdot\boldsymbol{g}_{k'} = v_{i'}|_{j'}\delta^{i'}_{k'} = v_{k'}|_{j'}$及右边变为 $v_i|_j\boldsymbol{g}^i\beta^j_{j'}\ \beta^h_{k'}\boldsymbol{g}_h$

$=v_i|_j\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}\delta^i_k=v_k|_j\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}$，于是有

$$v_{k'}|_{j'}=v_k|_j\beta^k_{k'}\beta^j_{j'} \qquad (5-26)$$

这就证明了$v_k|_j$是一个二阶协变张量。

其次，我们证明$v^k|_j$是二阶张量的混变分量。由式$\boldsymbol{v}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}$对$x^{j'}$求导数得

$$\boldsymbol{v}_{,j'}=v^{i'}|_{j'}\boldsymbol{g}_{i'}$$

又

$$\boldsymbol{v}_{,j'}=\boldsymbol{v}_{,j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}=v^i|_j\boldsymbol{g}_i\beta^j_{j'}$$

所以

$$v^{i'}|_{j'}\boldsymbol{g}_{i'}=v^i|_j\boldsymbol{g}_i\beta^j_{j'}$$

两边点 乘 以 $\boldsymbol{g}^{k'}=\beta^{k'}_k\boldsymbol{g}^k$得

$$v^{k'}|_{j'}=v^k|_j\beta^{k'}_k\beta^j_{j'} \qquad (5-27)$$

这就证明了$v^k|_j$是一个二阶混变张量。

由$v_k|_j$，$v^k|_j$的张量性质，很容易得到

$$v_i|_jg^{ik}=v^k|_j$$

$$(5-28)$$

和

$$v_i|_jg^{jk}=v_i|^k$$

2． 在任意非特殊坐标系中，向量的协变分量或逆变分量的普通导数不等于向量的协变导数，并且不是张量。

3． 标量的协变导数等于它的普通导数，即

$$\phi|_i=\phi_{,i} \qquad (5-29)$$

式中ϕ是标量函数。很容易证明$\phi_{,i}$是协变向量。因为利用求导数的链式法则，在新坐标系中有

$$\phi_{,i'}=\frac{\partial\phi}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}=\phi_{,i}\beta^i_{i'} \qquad (5-30)$$

4． 在笛卡尔坐标系中协变导数恒等于普通导数。这是因为此时克里斯托夫符号的全部分量为零，即$\Gamma_{ijk}\overset{*}{=}0$，$\Gamma^k_{ij}\overset{*}{=}0$（所有$i$，$j$，$k$）。

5. 向量微分。

当向量$\boldsymbol{v}(x^j)$沿着分量为dx^j的线元向量从x^j点移动到相邻点x^j+dx^j时，该向量$\boldsymbol{v}(x^j)$的改变为

$$d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{,j}dx^j \quad (5-31)$$

注意到式（5—25），上式可以写为

$$d\boldsymbol{v}=(dv)^i\boldsymbol{g}_i=v^i|_j\boldsymbol{g}_i dx^j \quad (5-32)$$

或

$$d\boldsymbol{v}=(dv)_i\boldsymbol{g}^i=v_i|_j\boldsymbol{g}^i dx^j \quad (5-33)$$

微分向量$d\boldsymbol{v}$的逆变分量$(dv)^i$和协变分量$(dv)_i$称为协变微分，今后协变微分算符用记号D表示，记$Dv^i=(dv)^i$，$Dv_i=(dv)_i$，而普通微分$dv^i=v^i_{,j}dx^j$，$dv_i=v_{i,j}dx^j$。于是，由式（5—20）、（5—22）、（5—32）、（5—33）有

$$Dv^i=(dv)^i=v^i|_jdx^j=dv^i+v^k\Gamma^i_{jk}dx^j \quad (5-34)$$

和

$$Dv_i=(dv)_i=v_i|_jdx^j=dv_i-v_k\Gamma^k_{ij}dx^j \quad (5-35)$$

二、二阶张量的协变导数

设二阶张量T_{ij}，现在求它的协变导数$T_{ij}|_k$的表达式。根据式（2—86），T_{ij}与两个向量u^i，v^j的连并得一标量

$$\phi=T_{ij}u^iv^j \quad (5-36)$$

将该式对x^k求导数，得

$$\begin{aligned}\phi_{,k}&=T_{ij,k}u^iv^j+T_{ij}u^i_{,k}v^j+T_{ij}u^iv^j_{,k}\\&=T_{ij,k}u^iv^j+T_{ij}u^i|_kv^j+T_{ij}u^iv^j|_k\\&\quad -T_{ij}u^l\Gamma^i_{kl}v^j-T_{ij}u^iv^l\Gamma^j_{kl}\end{aligned} \quad (j)$$

令

$$T_{ij}|_ku^iv^j=T_{ij,k}u^iv^j-T_{ij}u^lv^j\Gamma^i_{kl}-T_{ij}u^iv^l\Gamma^j_{kl} \quad (5-37)$$

这时，若注意到ϕ是标量，$\phi_{,k}=\phi|_k$，则式（j）变为

$$\phi_{,k}=\phi|_k=T_{ij}|_ku^iv^j+T_{ij}u^i|_kv^j+T_{ij}u^iv^j|_k \quad (5-38)$$

或写为

$$\phi|_k=(T_{ij}u^iv^j)|_k \quad (5-38')$$

变换哑标记号，式（5—37）写为

$$T_{ij}|_k u^i v^j=(T_{ij,k}-T_{lj}\Gamma^l_{ik}-T_{il}\Gamma^l_{kj})u^i v^j \qquad (5—37')$$

若对某张量T_{ij}和所有的u^i，v^j使上式成立，当且仅当

$$T_{ij}|_k=T_{ij,k}-T_{lj}\Gamma^l_{ik}-T_{il}\Gamma^l_{kj} \qquad (5—39)$$

由此我们定义，由式（5—39）所确定的量$T_{ij}|_k$称为二阶协变张量T_{ij}的协变导数。下面证明$T_{ij}|_k$是三阶协变张量。

由式（5—38）有

$$T_{ij}|_k u^i v^j=\phi|_k-T_{ij}u^i|_k v^j-T_{ij}u^i v^j|_k \qquad (k)$$

上式右端每一项都是一阶张量，因此等式左端也是一阶张量，故有

$$T_{i'j'}|_{k'}u^{i'}v^{j'}=\beta^k_{k'}T_{ij}|_k u^i v^j$$

$$=\beta^k_{k'}T_{ij}|_k\ \beta^i_{i'}u^{i'}\ \beta^j_{j'}v^{j'}$$

$$=T_{ij}|_k\beta^i_{i'}\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}u^{i'}v^{j'}$$

所以

$$T_{i'j'}|_{k'}=T_{ij}|_k\beta^i_{i'}\beta^j_{j'}\beta^k_{k'} \qquad (l)$$

这就证明了二阶协变张量的协变导数是三阶协变张量。

还可以用类似的方法定义另外三种形式的协变导数：

$$T^i_{\cdot j}|_k=T^i_{\cdot j,k}+T^l_{\cdot j}\Gamma^i_{kl}-T^i_{\cdot l}\Gamma^l_{jk} \qquad (5—40)$$

$$T_i^{\cdot j}|_k=T_i^{\cdot j}{}_{,k}-T_l^{\cdot j}\Gamma^l_{ik}+T_i^{\cdot l}\Gamma^j_{kl} \qquad (5—41)$$

$$T^{ij}|_k=T^{ij}{}_{,k}+T^{lj}\Gamma^i_{kl}+T^{il}\Gamma^j_{kl} \qquad (5—42)$$

三、高阶张量的协变导数

利用定义二阶张量协变导数的方法可以定义任何阶与结构高阶张量的协变导数。实际上，分析式（5—39）～（5—42）的特点后可以直接写出高阶张量协变导数的普遍公式。从上述公式看出，协变导数等于相应的普通导数，然后每个指标对应一项与原张量连并的第二类克里斯托夫符号，上标取正，下标取负。例如，高阶张量$T^{ij}_{\cdot\cdot rs\ldots}$的协变导数为

$$T^{ij}_{\cdot\cdot rs\ldots}|_k = T^{ij}_{\cdot\cdot rs\ldots,k} + T^{lj}_{\cdot\cdot rs\ldots}\Gamma^i_{lk} + T^{il}_{\cdot\cdot rs\ldots}\Gamma^j_{lk} - T^{ij}_{\cdot\cdot ls\ldots}\Gamma^l_{rk} - T^{ij}_{\cdot\cdot rl\ldots}\Gamma^l_{sk} - \cdots \qquad (5-43)$$

由式（5—34），（5—35）看出，协变微分等于协变导数与坐标微分的连并。于是我们可以得到高阶张量协变微分的一般公式

$$\begin{aligned} DT^{ij}_{\cdot\cdot rs\ldots} &= T^{ij}_{\cdot\cdot rs\ldots}|_k dx^k \\ &= dT^{ij}_{\cdot\cdot rs\ldots} + T^{lj}_{\cdot\cdot rs\ldots}\Gamma^i_{lk}dx^k \\ &\quad + T^{il}_{\cdot\cdot rs\ldots}\Gamma^j_{lk}dx^k - T^{ij}_{\cdot\cdot ls\ldots}\Gamma^l_{rk}dx^k \\ &\quad - T^{ij}_{\cdot\cdot rl\ldots}\Gamma^l_{sk}dx^k - \cdots \end{aligned} \qquad (5-44)$$

从上面的分析得出，引入协变导数后，张量的微分在形式上与普通微分一样。

四、黎奇（Ricci）定理

黎奇定理：度量张量的协变导数为零，即

$$g_{ij}|_k = 0,\quad g^{ij}|_k = 0 \qquad (5-45)$$

证明如下：

由式（5—39）并注意到式（5—7），有

$$\begin{aligned} g_{ij}|_k &= g_{ij,k} - g_{lj}\Gamma^l_{ik} - g_{il}\Gamma^l_{jk} \\ &= g_{ij,k} - \Gamma_{ikj} - \Gamma_{jki} \end{aligned}$$

将式（5—14）代入上式即得$g_{ij}|_k = 0$。同理可以证明 $g^{ij}|_k = 0$，$g^i_j|_k = 0$。（证毕）。

由黎奇定理直接推论得到

$$g|_k = 0 \qquad (5-46)$$

这是因为g是由g_{ij}的各分量相乘积组合的，见式（3—23）。

另外，我们还必须指出δ^i_j和置换张量$\in_{ijk}$，$\in^{ijk}$的协变导数性质：

$$\delta^i_j|_k = 0 \qquad (5-47)$$

$$\in_{ijk}|_l = 0,\quad \in^{ijk}|_l = 0 \qquad (5-48)$$

证明前一等式比较简单，由

$$\delta^i_j|_k = \delta^i_{j,k} + \delta^l_j \Gamma^i_{lk} - \delta^i_l \Gamma^l_{jk}$$
$$= 0 + \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}$$
$$= 0$$

等式（5—48）不容易像上式那样直接得到证明。但是，我们知道在笛卡尔直角坐标系里$\in_{ijk} \overset{*}{=} e_{ijk}$，这些分量都是常数，所以有

$$\in_{ijk,l} \overset{*}{=} 0 \qquad (m)$$

而在笛卡尔直角坐标系中普通导数与协变导数恒等，所以上式可以写为

$$\in_{ijk}|_l = 0 \qquad (5—49)$$

在上面等式中用等号＝代替了$\overset{*}{=}$，表示等式对所有的坐标系成立。这是因为它是一个四阶张量方程，在某一坐标系成立就能够在一切容许变换的坐标系成立。类似分析得到$\in^{ijk}|_l = 0$。

在进行协变微分计算时，式（5—45）～（5—48）是非常有用的。特别是在求协变导数时可以把g_{ij}，g^{ij}，$\in_{ijk}$，$\in^{ijk}$视为常量，尽管它们的分量是坐标的函数。

这样，当对度量张量或置换张量与其它张量乘积求协变导数时总可以把它们视为常量而提到微分算符之外。例如

$$(v^i g_{ij})|_k = v^i|_k g_{ij} \qquad (5—50)$$

五、协变导数的运算性质

综合前面的分析，在进行协变微分运算时，可遵循下面的规律。

1．张量的协变导数仍是张量，比原张量升高一阶，证明见式(i)、(l)。

2．诸张量之和的协变导数等于诸张量的协变导数之和。例如

$$(T^{ij} + S^{ij})|_k = T^{ij}|_k + S^{ij}|_k \qquad (5—51)$$

这很容易用直接代入法证明。

3．求若干个张量乘积的协变导数的方法与数学分析中求乘

积的普通导数方法相同。例如

$$(T^{lmn}S_{nj})|_k = T^{lmn}|_k S_{nj} + T^{lmn}S_{nj}|_k \quad (5-52)$$

亦可用直接代入法证明。

4. 求包含度量张量或置换张量的协变导数时把它们当作常数看待。

5. 在多次求混合协变偏导数时，一般说来，其结果与微分次序有关。但是，在欧几里德空间里，混合协变导数与微分次序无关。详见下一节的讨论。

必须指出，协变导数的引入只是对张量而言，非张量的协变导数是毫无意义的。

我们知道，物理学或力学的基本关系通常是由偏微分方程式表示的，要把它们写成在一切容许变换坐标系中都有效的张量方程，就必须用协变导数代替普通导数。

第三节　平　行　移　动

在这里，我们来讨论黎曼空间中向量的平移问题，并对张量的协变微分给以几何上的解释。

一、向量的平行移动

首先看看欧氏空间的情形。众所周知，在笛卡尔直角坐标系里，向量作平行移动后，其分量不变。沿闭合路线平移的结果得到一个与原向量恒等的向量，即二者重合。

如果向量在曲线坐标，例如平面极坐标中作平行移动，它的分量将发生变化，但是并不难求出它在任何位置的大小。向量沿闭合路线平行移动一周后，向量的分量不变。

在欧几里德空间把向量从一点平行的移动到另一点，其分量值与移动向量所经过的路径无关。

但是，在黎曼空间事情将变得非常复杂。为了简单，我们首先还是研究三维欧氏空间里的曲面，即二维黎曼空间的情形。为

此，必须明确两个概念：什么是曲面上的向量？在曲面上向量的平行移动是如何定义的？

所谓曲面上的向量，就是在给点切面上的向量。关于平行移动的概念，我们根据列维—齐维他方法定义。

设M和M'点是曲面S上无限接近的两点，现讨论在M点的一个向量$\boldsymbol{v}$，它的逆变分量为v^i，若按照通常三维欧氏空间中平行移动的概念将$\boldsymbol{v}$从M点移到M'点，一般说来，它已不在过M'的切面上。换句话说，它已不是曲面上的向量。

列维—齐维他定义曲面上向量平行移动的基本概念是，将向量$\boldsymbol{v}$由M点平行地移动到M'点后，再把它投影到曲面S上过M'点的切面内，得到一个曲面上过M'点的向量，用记号$\boldsymbol{v}'$表示，它的逆变分量为v'^i。定义v'^i是向量$\boldsymbol{v}$从M点到相邻的M'点的平行移动（图5—3）。

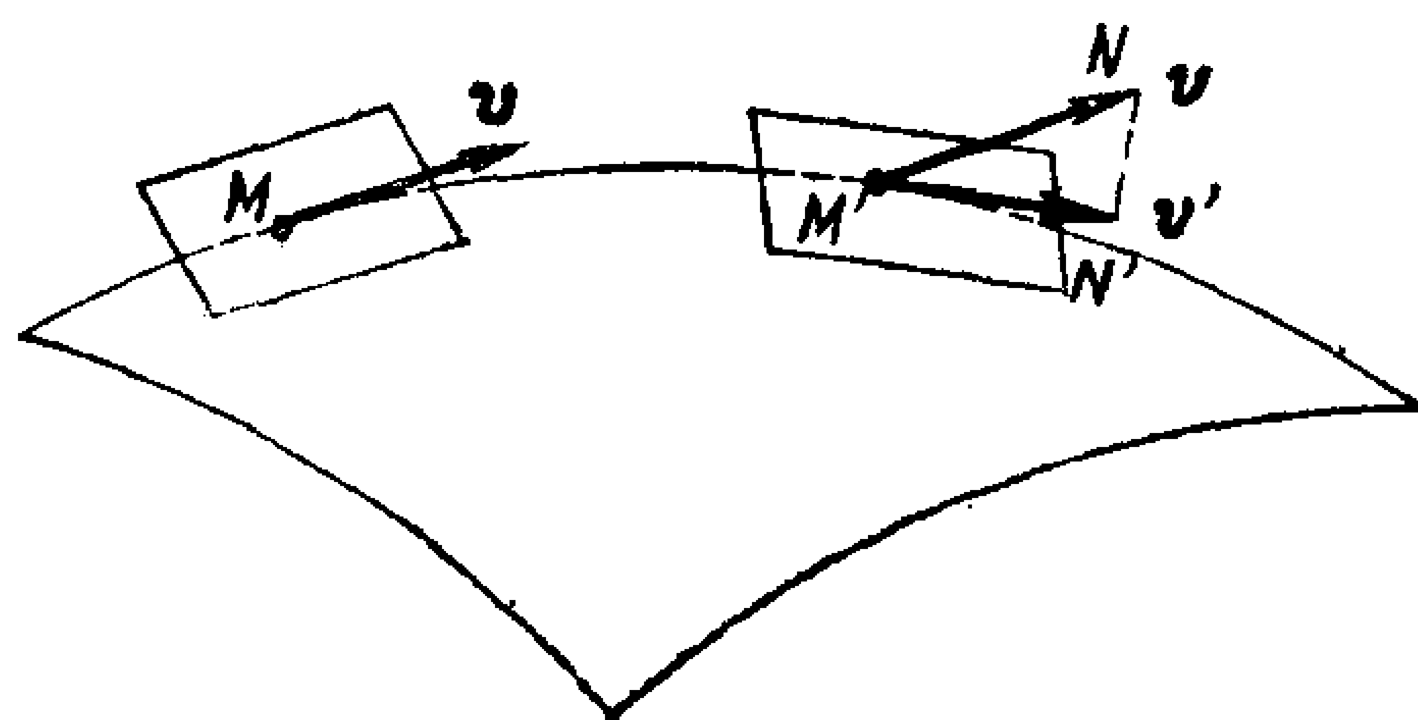


图 5—3

下面我们具体的求出v'^i。为此，首先讨论一下黎曼空间和欧氏空间的概念。前面说过，三维欧氏空间的曲面是二维黎曼空间，或者说黎曼空间可以看作是同维或高维欧氏空间的子空间，反过来把欧氏空间作为黎曼空间的包容空间。一般地，我们讨论m维欧氏空间中的n维黎曼空间。今后用E_m表示m维欧氏空间，用R_n表示n维黎曼空间。

今在m维欧氏空间中引用直角坐标系，坐标取为x_1，x_2，…，x_m。于是线元长度可表为

$$ds^2=\sum_{a=1}^{m}dx_a^2 \qquad (5-53)$$

而黎曼空间的曲线坐标取为x^1，x^2，…，x^n，则对于此空间中的诸点，x_1，x_2，…，x_m与x^1，x^2，…，x^n有一定的关系，用函数表为

$$x_a=x_a(x^1,x^2,\cdots,x^n),\ a=1,2,\cdots,m \qquad (5-54)$$

将式（5—54）代入（5—53）得到黎曼空间的基本关系式

$$ds^2=g_{ij}(x^1,x^2,\cdots,x^n)dx^idx^j \qquad (5-55)$$

式中

$$g_{ij}(x^1,x^2,\cdots,x^n)=\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial x_a}{\partial x^i}\frac{\partial x_a}{\partial x^j} \qquad (5-56)$$

现过黎曼空间的M点，在该点的逆变向量v^i方向作短程线。当沿短程线移动时坐标的微小增量为dx^i，而向量$\frac{dx^i}{ds}$称为短程线上的单位切线向量，因为根据公式（5—55）有

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=1 \qquad (5-57)$$

显然，过M点的向量v^i与$\frac{dx^i}{ds}$成正比，即

$$v^i=v\frac{dx^i}{ds} \qquad (5-58)$$

由式（5—57）和（5—58），有

$$v^2=g_{ij}v^iv^j \qquad (5-59)$$

显然，式中的v是向量v^i的长度。

若在m维欧氏空间考察过M点的向量$\boldsymbol{v}$，它在坐标轴上的投影为

$$v_a=v\frac{dx_a}{ds},\ a=1,2,\cdots,m \qquad (5-60)$$

这里dx_a为坐标x_a的增量。由式（5—54）有

$$dx_a=\frac{\partial x_a}{\partial x^i}dx^i \qquad (5-61)$$

将该式除以ds后代入式（5—60）得

$$v_{a}=v\frac{\partial x_{a}}{\partial x^{i}}\frac{dx^{i}}{ds}$$

利用式（5—58）则得

$$v_{a}=\frac{\partial x_{a}}{\partial x^{i}}v^{i} \qquad (5-62)$$

上面的分析指出，在黎曼空间R_n中的任何逆变向量都可以几何地在包容它的欧氏空间E_m中表示。必须注意的是，因为$n<m$，从式（5—62）的m个方程中解n个未知数并不是总能做得到的，所以前面的结论反过来不一定成立。也就是说，E_m中的任意一个向量不一定能在R_n中表示。最简单的情形是$n=2$，$m=3$，为三维空间中的曲面。很明显，曲面上的任何一个向量都能在E_3中表示，而E_3中的向量只有在曲面过M点切面上的向量才能在R_2中表示。

现在我们回过头来继续研究向量在曲面上的移动问题。根据列维—齐维他的定义计算M'点的向量v'^{i}。由图5—3，利用直观的几何推导，显然，$\boldsymbol{v}=\overline{M'N}$在$R_n$空间$M'$点切面上的投影向量$\boldsymbol{v}'=\overline{M'N'}$是使距离$N'N$为最小的向量。向量$\overline{NN'}$在$E_m$空间的分量为

$$v'_{a}-v_{a}=\left(\frac{\partial x_{a}}{\partial x^{i}}\right)'v'^{i}-\frac{\partial x_{a}}{\partial x^{i}}v^{i} \qquad (a)$$

在这里撇$'$表示该量在M'取值。引用记号

$$\delta v^{i}=v'^{i}-v^{i} \qquad (b)$$

又因

$$\left(\frac{\partial x_{a}}{\partial x^{i}}\right)'=\frac{\partial x_{a}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial^{2}x_{a}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}dx^{j}$$

于是，若只取一阶小量，式（a）变为

$$v'_{a}-v_{a}=\frac{\partial x_{a}}{\partial x^{i}}\delta v^{i}+\frac{\partial^{2}x_{a}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}v^{i}dx^{j}$$

所以

$$(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})^{2}=\sum_{a=1}^{m}\left(\frac{\partial x_{a}}{\partial x^{i}}\delta v^{i}+\frac{\partial^{2}x_{a}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}v^{i}dx^{j}\right)^{2} \qquad (c)$$

现把 δv^i 作为独立变数对上式取极值，按微分学的法则，将式（c）对所有 δv^r（$r=1$，2，…，n）取导数为零，结果得到 n 个等式

$$\sum_{a=1}^{m}\left(\frac{\partial x_a}{\partial x^i}\delta v^i+\frac{\partial^2 x_a}{\partial x^i\partial x^j}v^i dx^j\right)\frac{\partial x_a}{\partial x^r}=0,$$

$$r=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

于是，我们看到，当向量 v^i 平行移动时，其分量得到一增量 δv^i，并由下面等式决定：

$$\delta v^i\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial x_a}{\partial x^i}\ \frac{\partial x_a}{\partial x^r}+v^i dx^j\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial x_a}{\partial x^r}\ \frac{\partial^2 x_a}{\partial x^i\partial x^j}=0 \tag{d}$$

由公式（5—56）有

$$\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial x_a}{\partial x^i}\ \frac{\partial x_a}{\partial x^r}=g_{ir} \tag{e}$$

同时，若将式（m）轮换下标字母后代入式（5－15′），不难证明

$$\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial x_a}{\partial x^r}\ \frac{\partial^2 x_a}{\partial x^i\partial x^j}=\Gamma_{ijr} \tag{f}$$

将式（e），（f）代入式（d），得

$$g_{ir}\delta v^i+\Gamma_{ijr}v^i dx^j=0 \tag{g}$$

两边乘以 g^{rk}，注意到 $g_{ir}g^{rk}=\delta_i^k$，$g^{rk}\Gamma_{ijr}=\Gamma_{ij}^k$，并将指标 i，k 对换，则上式变为

$$\delta v^i+\Gamma_{kj}^i v^k dx^j=0 \tag{5—63}$$

该式表示，在无限接近的两点上，相同两向量的逆变分量的差 δv^i 与向量本身和坐标微分满足一个确定的关系。由式（5—63）求得

$$\delta v^i=-\Gamma_{kj}^i v^k dx^j \tag{5—63′}$$

于是M点的向量 v^i 平行移动到无限邻近的点M′后，变为

$$v'^i=v^i+\delta v^i=v^i-\Gamma_{kj}^i v^k dx^j \tag{5—64}$$

从式（5－63′）看到，δv^i完全是用R_n空间中的量表示的，它与黎曼空间是如何包含在欧氏空间无关。这就是说，向量向无限接近的一点平行移动的过程是黎曼空间的内蕴性质。

特别应当指出的是，一般说来，向量从黎曼空间R_n中的一点M到与该点距离为有限长的另一点P的平行移动，与所经过的路线有关。因此，求P点的逆变向量须对式（5－63）作路线积分。

向量在二维曲面上沿某给定曲线L的平行移动，还可以直观的加以说明。如这个曲面是可展的，可先将其展为平面，并使向量在平面上作平行移动，然后再卷成原来的曲面，这样就得到了平行移动后的向量。若曲面是不可展的，首先要选择平行移动的路线，然后作路线各点的切平面，这些切平面的包络是一个可展曲面，将其展开后将向量平移，最后再卷成原曲面。如果平移所经历的曲线恰好是短程线，则展成平面后，短程线就变成了直线。

前面说过，从一点向另一点沿不同路线平移向量得到不同的结果。换句话说，在R_n空间沿闭合路线平行移动向量的结果，一般说来并得不出原来的向量。如图5－4，在球面上由短程线构成一球面三角形，从向量$\boldsymbol{A}$开始平行移动，经$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$回到原来位置变为$\boldsymbol{D}$，很明显$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{D}$是不相同的。

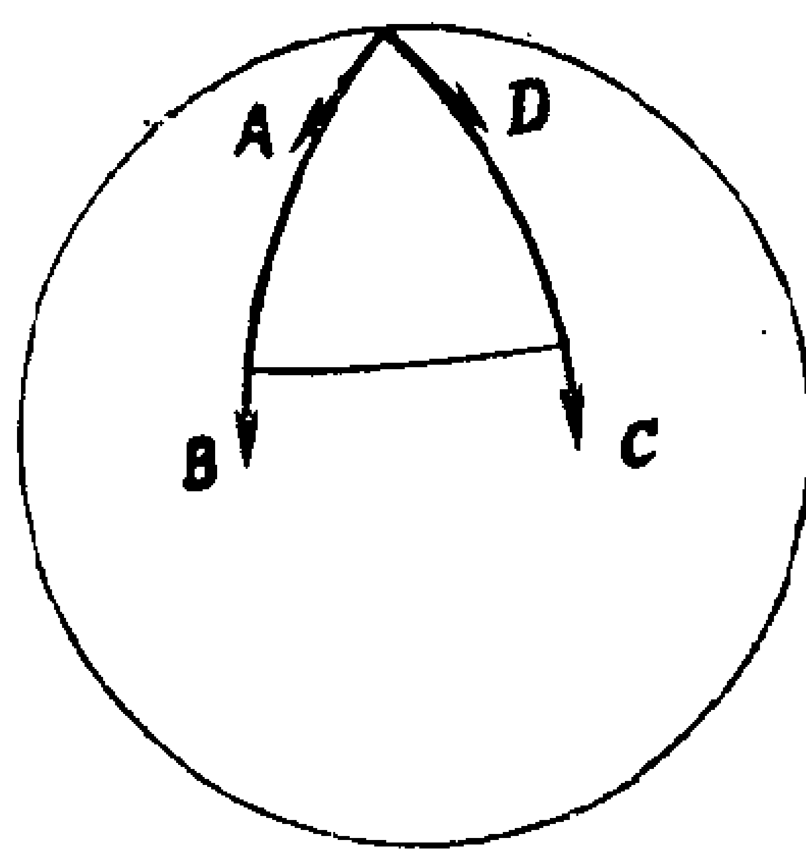


图 5－4

二、协变微分的几何意义

设M和M'是黎曼空间R_n中无限接近的两点，其坐标分别为x^i和x^i+dx^i，在M点有一逆变向量v^i，它在M'点的分量用v^i+dv^i表示，很明显

$$dv^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j \qquad (h)$$

如果和在向量分析中一样来定义向量v^i的导数，即首先将v^i由M平行的移动到M'，得到同一向量在两点的差，就是前边的公式（5—63′）。而v^i平移到M'后，具有分量为式（5—64），即

$$v^i + \delta v^i = v^i - \Gamma^i_{kj} v^k dx^j$$

于是，向量v^i由点$M(x^i)$移到与其无限接近的邻点$M'(x^i + dx^i)$的几何增量为

$$(v^i + dv^i) - (v^i + \delta v^i) = dv^i - \delta v^i$$

$$= \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} v^k\right) dx^j \qquad (5-65)$$

由式（5—22）知，上式右边圆括号里的量不是别的，就是逆变向量v^i的协变导数。这样，上式就可以写为

$$dv^i - \delta v^i = v^i|_j dx^j \qquad (5-66)$$

对比式（5—34），有

$$dv^i - \delta v^i = Dv^i = v^i|_j dx^j \qquad (5-67)$$

即，协变微分Dv^i就是v^i的几何增量$dv^i - \delta v^i$

由此也可以看出，协变微分或协变导数为零的几何意义就是向量的平行移动。因为，这时$dv^i - \delta v^i = 0$，由式（5—65），代入$dv^i = \delta v_i$，又得到平行移动公式（5—63′）。

现在不难求出协变向量v_i的平行移动公式。由前面分析，当把向量v^i在微小邻域内平行移动时，就是在M点的任何方向使$dv^i = \delta v^i$，即

$$v^i|_j = 0$$

不要忘记，$v^i|_j$是二阶张量的混变分量，根据张量性质，其它型式的分量也必为零，因此

$$v_i|_j = 0$$

由式（5—65），将dv_i代以δv_i，得

$$\delta v_i - v_k \Gamma^k_{ij} dx^j = 0 \qquad (5-68)$$

三、平行移动的性质

1． 两向量u^i和v^i的点积在平行移动时不变。

我们知道，两向量的点积定义为

$$u^i v_i = u_i v^i = g_{ij} u^i v^j = g^{ij} u_i v_j$$

由式（5—63′），（5—68）有

$$\begin{aligned}\delta(u^i v_i) &= v_i \delta u^i + u^i \delta v_i \\ &= -u^k v_i \Gamma^i_{kj} dx^j + u^i v_k \Gamma^k_{ij} dx^j \\ &= -u^k v_i \Gamma^i_{kj} dx^j + u^k v_i \Gamma^i_{kj} dx^j \\ &= 0\end{aligned}$$

2． 向量的长度在平行移动时不变。

由式（5—38），向量v^i的长度为

$$v^i v_i = g_{ij} v^i v^j = g^{ij} v_i v_j$$

根据性质1，显然$v^i v_i$不变。

3． 两向量平行移动时，其间的夹角不变。

因为u^i与v^i的夹角由式（3—16）可表为

$$\cos\theta = \frac{u^i v_i}{\sqrt{u^i u_i}\sqrt{v^i v_i}}$$

同样可根据性质（1）推论得出$\cos\theta$不变。

（4）向量在短程线上移动时的性质。

设一短程线L经过M点。用$\xi^i = \frac{dx^i}{ds}$表示与短程线相切的一向量，因为

$$g_{ij}\xi^i \xi^j = g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\ \frac{dx^j}{ds} = 1$$

所以ξ^i是短程线的单位切向向量。由$\xi^i = \frac{dx^i}{ds}$有$\frac{d\xi^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}$及$dx^i = \xi^i ds$，于是短程线方程式（5—19″）变为

$$d\xi^i + \Gamma^i_{kj}\xi^k dx^j = 0$$

将该式与式（5—63）比较得出结论：将单位向量沿短程线平行移动时，$\delta\xi^i = d\xi^i$，即当沿短程线L自一点M平行移动到另一点P时，在M点与短程线L相切的一单位向量ξ^i，在移到P点后

仍是单位向量，并且与同一短程线相切。

第四节 内蕴导数与实质导数

假设$x^k=x^k(t)$是域内的曲线，t是一参数；而$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$为域内的一个向量场。若$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$可微，则有

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{v}_{,k}\frac{dx^k}{dt}$$

将式（5—25）第一式代入，得

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=v^i|_k\boldsymbol{g}_i\frac{dx^k}{dt} \tag{5—69}$$

引用记号

$$\frac{\delta v^i}{\delta t}\equiv v^i|_k\frac{dx^k}{dt} \tag{5—70}$$

则式（5—69）可以写为

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\delta v^i}{\delta t}\boldsymbol{g}_i \tag{5—71}$$

我们把式中的$\frac{\delta v^i}{\delta t}$称为逆变向量$v^i$对$t$的内蕴导数。由式（5—70）看出，$v^i$的内蕴导数等于$v^i$的协变导数与$\frac{dx^k}{dt}$的内积。利用式（5—22），$\frac{\delta v^i}{\delta t}$还可以写为

$$\frac{\delta v^i}{\delta t}=\frac{dv^i}{dt}+v^m\Gamma^i_{km}\frac{dx^k}{dt} \tag{5—72}$$

同样定义

$$\frac{\delta v_i}{\delta t}=\frac{dv_i}{dt}-v_m\Gamma^m_{ik}\frac{dx^k}{dt} \tag{5—73}$$

类似地可以定义高阶张量的内蕴导数，例如

$$\begin{aligned}\frac{\delta T^i_{\cdot j}}{\delta t}&=T^i_{\cdot j}|_k\frac{dx^k}{dt}\\&=\frac{dT^i_{\cdot j}}{dt}+T^l_{\cdot j}\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{dt}-T^i_{\cdot l}\Gamma^l_{jk}\frac{dx^k}{dt}\end{aligned} \tag{5—74}$$

利用式（5—29），对标量函数ϕ有

$$\frac{\delta\phi}{\delta t}=\phi|_i\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\cdot\frac{dx^i}{dt}=\frac{d\phi}{dt} \quad (5-75)$$

另外，由式（5—55）直接得到

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta t}=0,\ \frac{\delta g^{ij}}{\delta t}=0 \quad (5-76)$$

所以，度量张量可以从内蕴微分记号提出。

如果向量v^i（或v_i）沿某曲线平行移动，则沿该曲线的内蕴导数为零，则它沿该曲线作平行移动。

假如向量$\boldsymbol{v}$也和t的显式相关，即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$$

于是有

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x^k}\ \frac{dx^k}{dt}$$

$$=\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^i|_k\frac{dx^k}{dt}\right)\boldsymbol{g} \quad (5-77)$$

引用记号

$$\frac{Dv^i}{Dt}=\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^i|_k\frac{dx^k}{dt} \quad (5-78)$$

并称为逆变向量v^i的实质导数（或物质导数）。这时式（5—77）变为

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{Dv^i}{Dt}\boldsymbol{g}_i \quad (5-77')$$

类似地可以定义

$$\frac{Dv_i}{Dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i|_k\frac{dx^k}{dt} \quad (5-79)$$

上边的定义还可以推广到高阶张量。例如，若$T^i_{\cdot j}=T^i_{\cdot j}(\boldsymbol{x},t)$，则有

$$\frac{DT^i_{\cdot j}}{Dt}=\frac{\partial T^i_{\cdot j}}{\partial t}+T^i_{\cdot j}|_k\frac{dx^k}{dt}=\frac{\partial T^i_{\cdot j}}{\partial t}+\frac{\delta T^i_{\cdot j}}{\delta t} \quad (5-80)$$

上边各式中，对t求偏导数时保持坐标不变，对坐标求协变导数时保持t不变。

对于度量张量，因为它与 t 无显式关系，所以

$$\frac{Dg_{ij}}{Dt}=0\,,\quad \frac{Dg^{ij}}{Dt}=0 \qquad (5-81)$$

第五节　黎曼-克里斯托夫 (Riemann-Christoffel)张量

在普通微积分学里已经证明，在很一般的情况下，混合偏导数的次序是可以交换的，例如

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^1}$$

现在的问题是，在张量分析里，张量的混合协变偏导数是否也可以交换次序？在上一节已经指出其结果，这里将给出具体分析。

下面我们来研究逆变向量v^k对x^n，x^m的混合协变偏导数与微分次序先后的关系问题。由式（5—22）v^k对x^n的协变偏导数为

$$v^k|_n=v^k_{,n}+v^l\Gamma^k_{nl} \qquad (a)$$

按同样的规则，将二阶张量$v^k|_n$再对x^m求协变偏导数，即得到v^k的二次协变偏导数，记

$$v^k|_n|_m=v^k|_{nm} \qquad (b)$$

则有

$$v^k|_{nm}=(v^k_{,n}+v^l\Gamma^k_{nl})|_m=(v^k_{,n}+v^l\Gamma^k_{nl})_{,m}$$
$$+(v^j_{,n}+v^l\Gamma^j_{nl})\Gamma^k_{mj}-(v^k_{,j}+v^l\Gamma^k_{jl})\Gamma^j_{nm} \qquad (5-82)$$

改变上述协变偏导数的次序，可由对换上式m，n的指标得到

$$v^k|_{mn}=(v^k_{,m}+v^l\Gamma^k_{ml})|_n$$
$$=(v^k_{,m}+v^l\Gamma^k_{ml})_{,n}+(v^j_{,m}+v^l\Gamma^j_{ml})\Gamma^k_{nj}$$
$$-(v^k_{,j}+v^l\Gamma^k_{jl})\Gamma^j_{mn} \qquad (5-83)$$

注意到$\Gamma^j_{mn}=\Gamma^j_{nm}$，$v^k_{,mn}=v^k_{,nm}$，相减两式得

$$v^k|_{nm}-v^k|_{mn}=v^l_{,m}\Gamma^k_{nl}+v^l\Gamma^k_{nl,m}-v^l_{,n}\Gamma^k_{ml}-v^l\Gamma^k_{ml,n}$$

$$+v^j_{,n}\Gamma^k_{mj}+v^l\Gamma^j_{nl}\Gamma^k_{mj}-v^j_{,m}\Gamma^k_{nj}$$
$$-v^l\Gamma^j_{ml}\Gamma^k_{nj}$$
$$=v^l(\Gamma^k_{nl,m}-\Gamma^k_{ml,n}+\Gamma^j_{nl}\Gamma^k_{mj}-\Gamma^j_{ml}\Gamma^k_{nj}) \tag{c}$$

引用记号

$$R_{nml}^{\cdot\cdot\cdot k}=\Gamma^k_{nl,m}-\Gamma^k_{ml,n}+\Gamma^j_{nl}\Gamma^k_{mj}-\Gamma^j_{ml}\Gamma^k_{nj} \quad (5-84)$$

则有

$$v^k|_{nm}-v^k|_{mn}=v^lR_{nml}^{\cdot\cdot\cdot k} \quad (5-85)$$

在上面等式的左边是三阶张量，v^l 是向量，根据商法则，$R_{nml}^{\cdot\cdot\cdot k}$ 必是一个四阶张量，称为黎曼—克里斯托夫张量，亦称曲率张量。这是因为曲面与平面的基本区别是曲面的曲率，而曲率是由黎曼—克里斯托夫张量的协变分量描述的。

如果从协变向量出发，重复前面的推演可得

$$v_l|_{nm}-v_l|_{mn}=-v_kR_{nml}^{\cdot\cdot\cdot k} \quad (5-86)$$

由式（5—84）可求得

$$R_{nmlk}=g_{kr}R_{nml}^{\cdot\cdot\cdot r}=g_{kr}(\Gamma^r_{nl,m}-\Gamma^r_{ml,n}+\Gamma^j_{nl}\Gamma^r_{mj}-\Gamma^j_{ml}\Gamma^r_{nj}) \tag{d}$$

变化等式右端前两项并利用式（5—14）有

$$g_{kr}(\Gamma^r_{nl,m}-\Gamma^r_{ml,n})$$
$$=(g_{kr}\Gamma^r_{nl})_{,m}-(g_{kr}\Gamma^r_{ml})_{,n}-g_{kr,m}\Gamma^r_{nl}+g_{kr,n}\Gamma^r_{ml}$$
$$=\Gamma_{nlk,m}-\Gamma_{mlk,n}-(\Gamma_{kmr}+\Gamma_{rmk})\Gamma^r_{nl}$$
$$+(\Gamma_{knr}+\Gamma_{rnk})\Gamma^r_{ml} \tag{e}$$

将式（e）代入（d）后稍加约简即得

$$R_{nmlk}=\Gamma_{nlk,m}-\Gamma_{mlk,n}+\Gamma_{knr}\Gamma^r_{ml}-\Gamma_{kmr}\Gamma^r_{nl} \quad (5-87)$$

利用式（5—15′）和（5—7），上式还可写为

$$R_{nmlk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{nk}}{\partial x^m\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{nl}}{\partial x^m\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^n\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^n\partial x^k}\right)$$
$$+g^{rs}(\Gamma_{knr}\Gamma_{lms}-\Gamma_{kmr}\Gamma_{lns}) \quad (5-88)$$

或

$$R_{nmlk}=\frac{1}{2}(g_{nk,ml}-g_{nl,mk}-g_{mk,nl}+g_{ml,nk})$$

$$+g^{rs}(\Gamma_{kns}\Gamma_{lms}-\Gamma_{kmr}\Gamma_{lns}) \qquad (5-88')$$

进一步可以用前面的方法推导出高阶张量混合协变偏导数由于交换微分次序引起的差，它也取决于黎曼-克里斯托夫张量。例如，对二阶混变张量有

$$T^{k}_{\cdot l}|_{nm}-T^{k}_{\cdot l}|_{mn}=T^{r}_{\cdot l}R_{nmr}^{\cdot\cdot\cdot k}-T^{k}_{\cdot r}R_{nml}^{\cdot\cdot\cdot r} \qquad (5-89)$$

式（5—85），（5—86），（5—89）给出了计算一阶张量和二阶混变张量的混合协变偏导数由于改变微分次序所产生的差的公式，它们也都是张量。从这些公式可以得到一个很重要的结论：

当且仅当黎曼-克里斯托夫张量为零时，张量的混合协变偏导数与微分的次序无关。否则与微分次序有关，并取决于黎曼-克里斯托夫张量。

由式（5—84）、（5—88）可以计算黎曼-克里斯托夫张量。虽然它是由张量的混合协变偏导数引导出来的，但是与原张量毫无关系，完全由度量张量及其一阶和二阶偏导数确定。也就是说，黎曼-克里斯托夫张量完全取决于空间的度量性质。

按照黎曼的定义，两坐标点x^i与x^i+dx^i之间的线元ds的一般形式由如下二次型给出（见第二章）：

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j \qquad (5-90)$$

若①g_{ij}是x^i的函数，②$g_{ij}=g_{ji}$(对称)，③$\det|g_{ij}|\neq 0$（$|g_{ij}|$不降秩），则该空间称为黎曼空间，n维黎曼空间记为R_n。度量张量给出了空间的线元长度和夹角，即确定了空间的基本度量。

如果在式（5—90）所确定的度量中，度量张量再加一个正定性条件，亦即若g_{ij}是正定对称的张量，这个空间就称为欧几里德空间（简称欧氏空间），n维欧氏空间记为E_n，三维则记为E_3。根据定义，欧氏空间的基本特征是：在各种普遍存在的曲线坐标系中有一个笛卡尔直角坐标系，使由式（5—90）表示的ds^2公式简化为坐标微分的平方和形式

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \qquad (5-91)$$

即存在欧几里德度量

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \qquad (5-92)$$

从定义看，欧氏空间可以看作是黎曼空间的特殊情形。但是，在任意的黎曼空间中，一般说来，不存在式（5—92）的欧几里德度量形式。

由于在笛卡尔直角坐标系中度量张量为常数，所以黎曼-克里斯托夫张量为零。但是，我们早就指出过，张量在一个坐标系中为零，则在其它一切坐标系中都等于零（见第二章）。

于是，黎曼-克里斯托夫张量为零是欧氏空间存在的必要条件。不加证明指出，它也是充分条件。

这样就得到进一步的结论：在欧几里德空间，黎曼-克里斯托夫张量为零，因此向量或张量的混合协变偏导数与微分次序无关。

反之，在非欧几里德空间，黎曼-克里斯托夫张量不为零，混合协变偏导数与微分次序有关。

三维欧氏空间中的曲面是二维黎曼空间。推广这一概念，可以把 n 维黎曼空间 R_n 看作是 m 维欧氏空间 E_m（$m \geqslant n$）的子空间。进一步的讨论指出，一般 $m=\frac{1}{2}n(n+1)$，就是说 n 维黎曼空间可以放入 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维欧几里德空间中。例如，R_2 可以放入 E_3 中，R_3 可以放入 E_6 中等等。

下面，我们考察黎曼空间中黎曼-克里斯托夫张量的性质。

1. 黎曼-克里斯托夫张量关于前两个指标 n，m 反对称，即

$$R_{nml}^{\cdot\cdot\cdot k} = -R_{mnl}^{\cdot\cdot\cdot k} \qquad (5-93)$$

$$R_{nmlk} = -R_{mnlk} \qquad (5-94)$$

或写为

$$R_{(nm)l}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0 \qquad (5-93')$$

$$R_{(nm)lk} = 0 \qquad (5-94')$$

2. 协变张量 R_{nmlk} 关于后两个指标 l、k 反对称，即

$$R_{nmlk} = -R_{nmkl} \tag{5—95}$$

或写为

$$R_{nm(lk)} = 0 \tag{5—95'}$$

3. 协变张量R_{nmlk}的前一对指标与后一对指标对称，即

$$R_{nmlk} = R_{lknm} \tag{5—96}$$

以上三条性质可直接由式（5—84）、（5—88）验证。

4. 循环置换式（5—84）、（5—88）的前三个下标，然后相加得

$$R_{nml}{}^{k} + R_{mln}{}^{k} + R_{lnm}{}^{k} = 0 \tag{5—97}$$

及

$$R_{nmlk} + R_{mlnk} + R_{lnmk} = 0 \tag{5—98}$$

或写为

$$R_{[nml]}{}^{k} = 0 \tag{5—97'}$$

$$R_{[nml]k} = 0 \tag{5—98'}$$

式（5—97）或（5—98）称为黎奇恒等式。

5. 黎曼-克里斯托夫张量独立分量的个数为

$$N_R = \frac{1}{12}n^2(n^2-1) \tag{5—99}$$

式中n是空间的维数。上式可根据前四条性质得出。

设只有两个不同指标，例如1和2。独立分量只有一个，因为R_{1212}，R_{1221}，R_{2121}，R_{2112}或相等或反号，其余均为零。所以n维空间中，只有两个不同指标时独立分量的个数为*)

$$C_n^2 \cdot 1 \tag{f}$$

若有三个不同标，例如1，2，3。不难验证，只有三个独立分量R_{1213}，R_{2123}，R_{3132}，其余的或为零或等于这三个分量或与之反号。故n维空间中三个不同指标时独立分量的个数为

$$C_n^3 \cdot 3 \tag{g}$$

若有四个不同指标，例如1，2，3，4。取R_{1234}，R_{2314}，R_{3124}，根据前面所叙R_{nmlk}的性质，所有其它具有1，2，3，

---

*) C_n^m表示从n里取m的组合。

4 指标的分量都可用它们表示。但是，根据黎奇恒等式（5－98），上面的三个分量只有两个是独立的。所以，n 维空间具有四个不同指标时独立分量的个数为

$$C_n^4 \cdot 2 \qquad (h)$$

所以，黎曼-克里斯托夫张量独立分量的个数为式（f），（g），（h）之和，即

$$N_R = C_n^2 \cdot 1 + C_n^3 \cdot 3 + C_n^4 \cdot 2$$

$$= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

另外，还很容易求得度量张量 g_{ij} 和克里斯托夫符号的独立分量个数分别为

$$N_g = \frac{1}{2} n(n+1) \qquad (5-100)$$

$$N_{\Gamma} = \frac{1}{2} n^2(n+1) \qquad (5-101)$$

根据式（5－99）～（5－101）可列一独立分量个数与空间维数关系的简表如下：

n	N_g	N_{Γ}	N_R
2	3	6	1
3	6	18	6
4	10	40	20
5	15	75	50

最后，介绍几个可由 R_{nmlk} 得到的在物理、力学或几何上都很有用的张量。

将 $R_{nml}^{\cdots k}$ 按指标 k，n 缩并得

$$R_{ml} = R_{nml}^{\cdots n} \text{（黎奇张量）} \qquad (5-102)$$

很容易证实，黎曼空间的黎奇张量是对称张量。因为 $R_{nml}^{\cdots k} =$

$g^{nr}R_{nmlr}$，所以上式又可表为

$$R_{ml}=g^{nr}R_{nmlr} \qquad (5-103)$$

而$R_{nmlr}=R_{lrnm}$，故有

$$R_{ml}=g^{nr}R_{lrnm}=g^{nr}R_{rlmn}=R_{lm}$$

将R_{ml}进一步缩并，得

$$R=R^m_m=g^{ml}R_{ml} \text{（曲率标量）} \qquad (5-104)$$

有时亦用下面的式子：

$$R'=\frac{R}{n(n-1)} \text{（} n \text{——空间维数）} \qquad (5-105)$$

由R_{lk}和R还可以组成一新张量

$$G_{ml}=R_{ml}-\frac{1}{2}Rg_{ml} \text{（爱因斯坦-黎奇张量）} \qquad (5-106)$$

例题　试确定二维黎曼空间曲率标量与曲率张量的关系。并就三维欧氏空间半径为a的球面求出R。

在欧氏空间取笛卡尔直角坐标系有

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (a')$$

取球坐标r，θ，φ见图2—10，则球面上一点的位置可由两个坐标参数θ，φ确定，置

$$x^1=\varphi,\quad x^2=\theta \qquad (b')$$

使球面构成二维黎曼空间。

因为二维黎曼空间里，黎曼-克里斯托夫张量只有一个独立分量R_{1212}，其余或与之相等或与之相反，或为零。运算后得到

$$R=-\frac{2R_{1212}}{g} \qquad (c')$$

式中，$g=\det(g_{ij})$。式

$$K=\frac{R_{1212}}{g} \qquad (d')$$

称为二维黎曼空间的高斯曲率。

由式（a'），很明显，线元长度的平方为

$$\begin{aligned} ds^2&=a^2(d\varphi^2+\cos^2\varphi d\theta^2)\\ &=a^2(dx^1)^2+a^2\cos^2(x^1)(dx^2)^2 \end{aligned} \qquad (e')$$

所以，度量张量的分量为

$$g_{11}=a^2,\quad g_{12}=g_{21}=0,\quad g_{22}=a^2\cos^2(x^1) \qquad (f')$$

及
$$g^{11}=\frac{1}{a^2},\quad g^{12}=g^{21}=0,\quad g^{22}=\frac{1}{a^2\cos^2(x^1)} \qquad (g')$$

而
$$g=a^4\cos^2(x^1) \qquad (h')$$

克里斯托夫符号由式（5—15′）计算，得

$$\Gamma_{111}=\Gamma_{112}=\Gamma_{121}=\Gamma_{222}=0$$

$$(i')$$

$$\Gamma_{122}=-\Gamma_{221}=-\frac{1}{2}a^2\sin(2x^1)$$

将式（f'），（g'），（i'）代入式（5—88），得

$$R_{1212}=a^2\cos^2(x^1) \qquad (j')$$

于是，由式（c'）有

$$R=-\frac{2R_{1212}}{g}=-\frac{2}{a^2} \qquad (k')$$

而高斯曲率为

$$K=\frac{R_{1212}}{g}=\frac{1}{a^2} \qquad (l')$$

第六节　张量场。梯度、散度和旋度。积分定理

一、梯度、散度和旋度的表示。∇^2算子

在附录中定义了梯度、散度和旋度，现按不同方式分别表示于后。

1．笛卡尔直角坐标系中的表达式

$$\mathrm{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (5—107)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (5—108)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}-\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad (5-109)$$

2．不变性表达式

$$\text{grad}\ \phi=\nabla\phi \qquad (5-110)$$

$$\text{div}\ \boldsymbol{v}=\nabla\cdot\phi \qquad (5-111)$$

$$\text{rot}\ \boldsymbol{v}=\nabla\times\phi \qquad (5-112)$$

3．张量形式的表达式

梯度。注意到标量函数ϕ对坐标的导数可以写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i}=\phi,_i$$

由式（5—29）知，标量的普通导数等于它的协变导数，即

$$\phi,_i=\phi|_i$$

所以，梯度表达式（5—107）可以写为

$$\text{grad}\ \phi=\phi|_i\boldsymbol{g}^i \qquad (5-113)$$

或

$$(\text{grad}\ \phi)_i=\phi|_i \qquad (5-114)$$

实际上也可以直接由式（5—113）来定义梯度，即对标量求协变导数所得到的向量称为梯度。

当标量场$\phi(x^i)$从x^i变到x^i+dx^i时，ϕ的增量为

$$d\phi=\phi,_i dx^i=\phi|_i dx^i=(\text{grad}\ \phi)\cdot d\boldsymbol{x} \qquad (5-115)$$

该式指出，标量场的变化率是由梯度向量来度量的，ϕ沿$d\boldsymbol{x}$方向的变化率就等于梯度向量在该方向的投影，显然当$d\boldsymbol{x}$与grad ϕ一致时$d\phi$最大，即grad ϕ的方向指向标量场ϕ变化最大的方向。

散度。在笛卡尔直角坐标系，散度公式（5—108）还可以写为div$\boldsymbol{v}=v^i,_i$，为了把散度公式写成任何坐标系都成立的张量形式，用协变导数$v^i|_i$代替普通导数$v^i,_i$，得

$$\text{div}\ \boldsymbol{v}=v^i|_i \qquad (5-116)$$

如果用协变向量，散度还可以写为

$$\text{div}\ \boldsymbol{v}=v_i|^i \qquad (5-117)$$

或者将上二式记为

$$\text{div}\ v^k=v^i|_i \qquad (5-116')$$

及 $$\mathrm{div}\, v_k = v_i|^i \tag{5—117'}$$

实际上也可以直接由式（5—116）或（5—117）来定义散度，即把向量的协变导数 $v^i|_j$（是二阶张量）缩并所得到的不变量 $v^i|_i$ 作为向量散度的定义。

注意到式（5—22），（5—24）和（5—28），上二式可以写为

$$\mathrm{div}\, v^k = v^i|_i = v^i{}_{,i} + v^m \Gamma^i_{im} \tag{5—118}$$

及 $$\mathrm{div}\, v_k = v_i|^i = v_i|_j g^{ji} = g^{ji}(v_{i,j} - v_m \Gamma^m_{ij}) \tag{5—119}$$

利用本章第一节例题5的式（f'），散度公式（5—118）还可以写为

$$\mathrm{div}\, v^k = v^i{}_{,i} + v^m \Gamma^i_{im} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \frac{v^m}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m}$$

$$= \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \frac{v^i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i}$$

按照通常的微分规则，上式表为

$$\mathrm{div}\, v^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\, v^i) \tag{5—120}$$

很明显，在笛卡尔直角坐标系 $\sqrt{g} = 1$，上式变为常见的形式。

旋度。用 $\boldsymbol{e}_i$ 表示相互正交的单位基向量，旋度表达式（5—109）可以表为

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} e^{231} + \frac{\partial v_2}{\partial x^3} e^{321}\right)\boldsymbol{e}_1$$

$$+ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} e^{312} + \frac{\partial v_3}{\partial x^1} e^{132}\right)\boldsymbol{e}_2$$

$$+ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} e^{123} + \frac{\partial v_1}{\partial x^2} e^{213}\right)\boldsymbol{e}_3$$

在笛卡尔直角坐标系中，$\boldsymbol{e}_i \overset{*}{=} \boldsymbol{g}_i$，$e^{ijk} \overset{*}{=} \in^{ijk}$。因此，上式可以一般地写为

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} \in^{231} + \frac{\partial v_2}{\partial x^3} \in^{321}\right)\boldsymbol{g}_1$$

$$+ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} \in^{321} + \frac{\partial v_3}{\partial x^1} \in^{132}\right)\boldsymbol{g}_2$$

$$+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1}\in^{123}+\frac{\partial v_1}{\partial x^2}\in^{213}\right)\boldsymbol{g}_3$$

再将上式中的普通导数代以协变导数，便得到

$$\text{rot}\ \boldsymbol{v}=\text{rot}\ v_l=v_j|_i\in^{ijk}\boldsymbol{g}_k \tag{5-121}$$

或

$$\text{rot}\ \boldsymbol{v}=\text{rot}\ v^l=v^j|^i\in_{ijk}\boldsymbol{g}^k \tag{5-122}$$

如置rot $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}$，旋度向量的分量表为

$$\Omega^k=v_j|_i\in^{ijk} \tag{5-123}$$

$$\Omega_k=v^j|^i\in_{ijk} \tag{5-124}$$

事实上也可以直接从最后这两个公式来定义旋度。我们知道，向量的协变导数$v_j|_i$是二阶张量，$v_k|_j\in^{ijk}$是与$v_j|_i$反对称部分联系的向量。所以，与向量v_j协变导数$v_j|_i$反对称部分相联系的向量$v_j|_i\in^{ijk}$，称为原向量v_j的旋度。

也把反对称张量

$$\Omega_{ij}=v_j|_i-v_i|_j \tag{5-125}$$

定义为向量$\boldsymbol{v}$的旋度。而

$$v_j|_i-v_i|_j=(v_{j,i}-v_k\Gamma^k_{ji})-(v_{i,j}-v_k\Gamma^k_{ij})$$

$$=v_{j,i}-v_{i,j} \tag{5-126}$$

亦即旋度分量Ω_{ij}与空间度量无关。因此，式（5—125）可以写为

$$\Omega_{ij}=v_{j,i}-v_{i,j} \tag{5-127}$$

而式（5—123）的三个分量为

$$\Omega^1=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2}-\frac{\partial v_2}{\partial x^3}\right)$$

$$\Omega^2=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3}-\frac{\partial v_3}{\partial x^1}\right) \tag{5-128}$$

$$\Omega^3=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1}-\frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right)$$

为了对旋度的力学意义有个初步了解，我们考察刚体作微小转动时的位移。设在直角坐标系统三个坐标轴的转角分别为ω_1，ω_2，ω_3。则由弹性力学知，这时产生的位移为

$$u_1 = -\omega_3 x^2 + \omega_2 x^3$$
$$u_2 = \omega_3 x^1 - \omega_1 x^3 \qquad (5-129)$$
$$u_3 = -\omega_2 x^1 + \omega_1 x^2$$

或写为向量式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \qquad (5-129')$$

式中，$\boldsymbol{\omega}$是转动向量，$\boldsymbol{r}$是位置向量，表为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + \omega_3 \boldsymbol{e}_3$$

及
$$\boldsymbol{r} = x^1 \boldsymbol{e}_1 + x^2 \boldsymbol{e}_2 + x^3 \boldsymbol{e}_3$$

现在求位移向量 $\boldsymbol{u}$ 的旋度，注意到此时 $\sqrt{g} = 1$，将式（5—129）代入（5—128），得$\Omega^1 = 2\omega_1$，$\Omega^2 = 2\omega_2$，$\Omega^3 = 2\omega_3$或

$$\Omega^i = 2\omega_i \qquad (5-130)$$

即，刚体绕固定点做微转动时，其上一点位移向量的旋度等于转动向量的二倍。

综上所述，我们得到了普遍适用的梯度、散度和旋度的张量表达式，由此可以得到欧氏空间中任何曲线坐标系里的具体形式，详见后面的例题。这里再讨论一个力学中经常遇到的算子—拉普拉斯（Laplace）算子∇^2的张量形式。

拉普拉斯算子可以用不同的方法定义，这里，我们把它定义为标量场梯度的散度，即

$$\nabla^2 \phi = \mathrm{div}\, \mathbf{grad}\, \phi \qquad (5-131)$$

该式就是拉普拉斯算子的不变性记法。由式（5—113），$\mathbf{grad}\, \phi = \phi|_i \boldsymbol{g}^i$，注意到式（5—117′），有

$$\nabla^2 \phi = \mathrm{div}\, \phi|_i = \phi|_i^i \qquad (5-132)$$

如果是笛卡尔直角坐标系，上式就变为常见的形式

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad (5-133)$$

如记

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{grad}\, \phi = \phi|_i \boldsymbol{g}^i = u_i \boldsymbol{g}^i$$

则
$$u_i = \phi|_i$$

而
$$u^i = g^{ik} \phi|_k$$

利用式（5—120），得

$$\nabla^2\phi=\operatorname{div}(g^{ik}\phi|_k)=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{g}\,g^{mk}\phi_{,k})$$

所以，拉普拉斯算子可以写为

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sqrt{g}\ g^{mk}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)\qquad(5.—134)$$

式（5—131），（5—132），（5—134）都是适合于任何坐标系的普遍公式。

最后，我们考虑rot grad ϕ和div rot $\boldsymbol{v}$。由式（5—113），（5—121）有

rot grad $\phi=\text{rot}(\phi|_j\boldsymbol{g}^j)=\phi|_j|_i\in^{ijk}\boldsymbol{g}_k=\phi|_{ji}\in^{ijk}\boldsymbol{g}_k$ 由于 $\phi|_{ji}=\phi|_{ij}$，所以上式为零，即

$$\text{rot grad}\ \phi=0\qquad(5—135)$$

该式说明，梯度场没有旋度，所以梯度场是无旋场或有势场。

由式（5—121），（5—116′）有

$$\begin{aligned}\text{divrot}\ \boldsymbol{v}&=\operatorname{div}(v_j|_i\in^{ijk}\boldsymbol{g}_k)=(v_j|_i\in^{ijk})|_k\\&=v_j|_{ik}\in^{ijk}\end{aligned}$$

由于在欧氏空间$v_j|_{ik}=v_j|_{ki}$，所以上式为零，即

$$\text{div rot}\ \boldsymbol{v}=0\qquad(5—136)$$

该式说明，旋度场没有散度，所以向量的旋度场是管量场或无源场。

如果在空间的某一部分标量函数ψ所构成的梯度场（它是无旋场）是个无源场，则称为调和场。根据这个定义，显然有

$$\text{div grad}\ \psi=0$$

由此得

$$\nabla^2\psi=0\qquad(5—137)$$

ψ称为调和函数，即调和函数满足拉普拉斯方程。

由式（5—134），任意坐标系中的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sqrt{g}\ g^{mk}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right)=0\qquad(5—138)$$

例题 1 在柱坐标系中：（1）求标量函数 ϕ 的梯度，用物理分量表示；（2）用逆变向量 v^i 的物理分量表示其散度，（3）用物理分量表示向量 v^i 的旋度；（4）表示标量函数 ϕ 的拉普拉斯算式 $\nabla^2\phi$。

在柱坐标系中，取 $x^1=r$（半径），$x^2=\theta$（极角），$x^3=z$。由第三章第一节例题 1 知，这时

$$g_{11}=1,\ g_{22}=r^2,\ g_{33}=1,\ g_{ij}=0\ (i\neq j) \qquad (a')$$

$$g^{11}=1,\ g^{22}=\frac{1}{r^2},\ g^{33}=1,\ g^{ij}=0\ (i\neq j) \qquad (b')$$

$$g=r^2,\quad \sqrt{g}=r \qquad (c')$$

（1）由式（5—113），注意 $\phi|_i=\phi,_i$，有

$$\mathrm{grad}\ \phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{g}^r+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{g}^\theta+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{g}^z \qquad (d')$$

由式（4—57），求得

$$(\mathrm{grad}\ \phi)_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big/\sqrt{g_{11}}=\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$(\mathrm{grad}\ \phi)_\theta=\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\Big/\sqrt{g_{22}}=\frac{\partial\phi}{r\partial\theta} \qquad (e')$$

$$(\mathrm{grad}\ \phi)_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big/\sqrt{g_{33}}=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

（2）向量 v^i 的物理分量用 $v_{(r)}$，$v_{(\theta)}$，$v_{(z)}$ 表示，为了方便，去掉下标上的圆括号，由式（4—57）有

$$v_r=v^1\sqrt{g_{11}}=v^1,\quad v_\theta=v^2\sqrt{g_{22}}=rv^2 \qquad (f')$$

$$v_z=v^3\sqrt{g_{33}}=v^3$$

于是，根据式（5—120），得

$$\mathrm{div}\ v^k=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(rv_z)\right] \qquad (g')$$

（3）由式（3—17），在柱坐标中，向量的逆变分量与协变分量的关系为

$$v_1=g_{11}v^1=v_r,\quad v_2=g_{22}v^2=rv_\theta \qquad (h')$$

$$v_3=g_{33}v^3=v_z$$

代入式（5—128），得

$$\Omega^1=\frac{1}{r}\ \frac{\partial v_z}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$\Omega^2=\frac{1}{r}\ \frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{1}{r}\ \frac{\partial v_z}{\partial r} \qquad (i')$$

$$\Omega^3=\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)-\frac{1}{r}\ \frac{\partial v_r}{\partial\theta}$$

如用Ω_r，Ω_θ，Ω_z表示Ω^i的物理分量，由类似于式（f'）的关系得到

$$\Omega_r=\frac{1}{r}\ \frac{\partial v_z}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$\Omega_\theta=\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r} \qquad (j')$$

$$\Omega_z=\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)-\frac{1}{r}\ \frac{\partial v_r}{\partial\theta}$$

（4）将式（b'）．（c'）代入式（5—134），得

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right] \qquad (k')$$

例题 2　在球坐标系中求例题 1 的四项内容。

在球坐标中，取 $x^1=r$，$x^2=\theta$，$x^3=\varphi$（见图 2—10），由第三章第一节例题 2 求得

$$g_{11}=1,\ g_{22}=r^2\cos^2\varphi,\ g_{33}=r^2,\ g_{ij}=0\ （当 i\neq j） \qquad (a')$$

$$g^{11}=1,\ g^{22}=\frac{1}{r^2\cos^2\varphi},\quad g^{33}=\frac{1}{r^2},\ g^{ij}=0\ （当 i\neq j） \qquad (b')$$

$$g=r^4\cos^2\varphi,\ \sqrt{g}=r^2\cos\varphi \qquad (c')$$

用与例题 1 完全类似的方法求得：

（1）ϕ的梯度的物理分量

$$(\text{grad}\,\phi)_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\ (\text{grad}\,\phi)_\theta=\frac{1}{r\cos\varphi}\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad (d')$$

$$(\text{grad}\ \phi)_\varphi = \frac{\partial\phi}{r\partial\varphi}$$

（2） v^i的散度

$$\text{div}\ v^i = \frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cos\varphi v_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(rv_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi v_\varphi)\right] \qquad (e')$$

（3） v^i旋度的物理分量

$$\Omega_r = \frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(rv_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi v_\theta)\right]$$

$$\Omega_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right] \qquad (f')$$

$$\Omega_\varphi = \frac{1}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]$$

（4） ϕ的拉普拉斯算符$\nabla^2\phi$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cos\varphi\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) \qquad (g')$$

二、二阶张量的散度

在定义向量散度的基础上，我们来定义二阶张量的散度。

式（5—116′），（5—117′）可以作为向量散度的解析定义，现把它推广到二阶张量。

定义协变导数$T^{ik}|_i$为二阶张量T^{ik}的散度，它是一个向量，记为$\text{div}\ T^{ik}$。即

$$\text{div}\ T^{ik} = T^{ik}|_i \qquad (5-139)$$

或

$$\text{div}\ T = T^{ik}|_i \qquad (5-140)$$

由二阶张量协变导数一般表达式（5—42）可得

$$\mathrm{div}\ T^{ik}=T^{ik}|_{i}=T^{ik}_{\ \ ,i}+T^{mk}\Gamma^{i}_{im}+T^{im}\Gamma^{k}_{im}$$

$$=\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^{i}}+\frac{T^{mk}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{m}}+T^{im}\Gamma^{k}_{im} \qquad (a)$$

在上式推导中的最后一步，应用了本章第一节例题5的式（f'）。合并上式的前两项，得

$$\mathrm{div}\ T^{ik}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}T^{ik})}{\partial x^{i}}+T^{im}\Gamma^{k}_{im} \qquad (5—141)$$

如果$T^{im}=-T^{mi}$（反对称张量），在对 i 和m求和时，最后一项为零，这时

$$\mathrm{div}\ T^{ik}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}T^{ik})}{\partial x^{i}} \quad (T^{ik}\text{为反对称张量})$$

（5—142）

如果$T^{im}=T^{mi}$（对称张量），用混变张量表示更为方便。这时$T_{i}^{\ m}=T^{m}_{\ \cdot i}=T^{m}_{i}$，由式（5—41），有

$$\mathrm{div}\ T^{l}_{i}=T^{k}_{i}|_{k}=T^{k}_{i,k}-T^{k}_{m}\Gamma^{m}_{ik}+T^{m}_{i}\Gamma^{k}_{km}$$

$$=\frac{\partial T^{k}_{i}}{\partial x^{k}}+\frac{T^{m}_{i}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{m}}-T^{kn}\Gamma_{ikm}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}T^{k}_{i})}{\partial x^{k}}-T^{kn}\Gamma_{ikn} \qquad (b)$$

由于T^{kn}的对称性，上式最后一项可写为

$$T^{kn}\Gamma_{ikn}=\frac{1}{2}(T^{kn}\Gamma_{ikn}+T^{nk}\Gamma_{ikn})$$

$$=\frac{1}{2}T^{kn}(\Gamma_{ikn}+\Gamma_{ink})$$

$$=\frac{1}{2}T^{kn}(\Gamma_{kin}+\Gamma_{nik})$$

$$=\frac{1}{2}T^{kn}g_{kn,i} \qquad (c)$$

在推导上式中应用了克里斯托夫符号的性质和公式（5—14），将式（c）代回（b），得

$$\operatorname{div} T^{l}_{i}=\frac{1}{\sqrt{g}}\ \frac{\partial(\sqrt{g}\,T^{k}_{i})}{\partial x^{k}}-\frac{1}{2}T^{kn}\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^{i}}$$

（5—143）

或 $$\operatorname{div}\ \boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{g}}\ \frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{ij}T^{kj})}{\partial x^{k}}-\frac{1}{2}T^{kn}\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^{i}}$$

（5—144）

例题 3 试用：（1）直角坐标；（2）柱坐标；（3）球坐标写出应力张量 σ 的散度。

（1）在笛卡尔直角坐标系中，应力张量三种形式的分量是一样的，我们采用下标表示。注意到这时 $g=1$，g_{kn} 为常量，由式（5—143）有

$$(\operatorname{div}\ \boldsymbol{\sigma})_{x}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}$$

$$(\operatorname{div}\ \boldsymbol{\sigma})_{y}=\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}\qquad(a')$$

$$(\operatorname{div}\ \boldsymbol{\sigma})_{z}=\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}$$

（2）在柱坐标中，度量张量的分量见例题1，由式（5—144），有

$$(\operatorname{div}\ \boldsymbol{\sigma})_{1}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(r g_{11}\sigma^{k1}\right)\right]-\frac{1}{2}\sigma^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{1}}$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma^{11})+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sigma^{21})+\frac{\partial}{\partial z}(r\sigma^{31})\right]-r\sigma^{22}$$

$$(\operatorname{div}\ \boldsymbol{\sigma})_{2}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x^{k}}(r g_{22}\sigma^{k2})\right]$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^{3}\sigma^{12})+\frac{\partial}{\partial\theta}(r^{3}\sigma^{22})+\frac{\partial}{\partial z}(r^{3}\sigma^{32})\right]$$

(b')

$$(\operatorname{div}\ \sigma)_{3}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x^{k}}(r g_{33}\sigma^{k3})\right]$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma^{13})+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sigma^{23})+\frac{\partial}{\partial z}(r\sigma^{33})\right]$$

如用 $(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})_r$，$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})_\theta$，$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})_z$ 表示应力张量散度的物理分量，用 σ_{rr}，$\sigma_{r\theta}$，……表示 σ^{11}，σ^{12}……的物理分量，由式（4—59），有

$$\sigma_{rr}=\sigma^{11},\quad \sigma_{r\theta}=r\sigma^{12},\quad \sigma_{rz}=\sigma^{13}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=r^2\sigma^{22},\quad \sigma_{\theta z}=r\sigma^{23},\quad \sigma_{zz}=\sigma^{33} \qquad (c')$$

将式 (c') 代入 (b')，并将三个式子分别除以1，r，1得

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})_r=\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}$$

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})_\theta=\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\sigma z}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \qquad (d')$$

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})_z=\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}$$

（3）在球坐标中，度量张量的分量见例题2，由式（5—144），有

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})^1=\frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial(r^2\cos\varphi\, g_{11}\sigma^{k1})}{\partial x^k}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}+\sigma^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+\sigma^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right)$$

$$=\frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cos\varphi\sigma^{11})\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\cos\varphi\sigma^{21})+\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\cos\varphi\sigma^{31})\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^{22}\frac{\partial(r^2\cos^2\varphi)}{\partial r}+\sigma^{33}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\right)$$

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})^2=\frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial(r^2\cos\varphi\, g_{22}\sigma^{k2})}{\partial x^k}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}+\sigma^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}+\sigma^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^4\cos^3\varphi\sigma^{12})\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}(r^4\cos^3\varphi\sigma^{22})+\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^4\cos^3\varphi\sigma^{32})\Big]$$

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})^3=\frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial(r^2\cos\varphi g_{33}\sigma^{k3})}{\partial x^k}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}+\sigma^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}+\sigma^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right)$$

$$=\frac{1}{r^2\cos\varphi}\Big[\frac{\partial}{\partial r}(r^4\cos\varphi\sigma^{13})$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}(r^4\cos\varphi\sigma^{23})+\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^4\cos\varphi\sigma^{33})\Big]$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^{22}\frac{\partial(r^2\cos^2\varphi)}{\partial\varphi} \qquad (e')$$

球坐标中，应力的张量分量与物理分量的关系可由式（4—59）求得，为

$$\sigma_{rr}=\sigma^{11},\quad \sigma_{r\theta}=r\cos\varphi\sigma^{12},\quad \sigma_{r\varphi}=r\sigma^{13}$$

$$(f')$$

$$\sigma_{\theta\theta}=r^2\cos^2\varphi\sigma^{22},\quad \sigma_{\theta\varphi}=r^2\cos\varphi\sigma^{23},\quad \sigma_{\varphi\varphi}=r^2\sigma^{33}$$

于是，可求得用物理分量表示的散度公式，为

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})_r=\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{r\partial\varphi}$$

$$+\frac{2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi}-\mathrm{tg}\varphi\sigma_{r\varphi}}{r}$$

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})_\theta=\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{r\partial\varphi}$$

$$+\frac{3\sigma_{r\theta}-2\mathrm{tg}\varphi\sigma_{\theta\varphi}}{r}$$

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma})_\varphi=\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{r\partial\varphi}$$

$$+\frac{3\sigma_{r\varphi}+\mathrm{tg}\varphi(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi})}{r} \qquad (g')$$

三、积 分 定 理

在向量分析里有两个重要的定理——高斯散度定理和斯托克

斯旋度定理（见附录）。现在我们把它们表示为对于任何坐标系都成立的张量形式。

1. 高斯散度定理

在附录中，式（106）给出了高斯散度定理的不变性形式，写为

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}dV = \oint\!\!\!\oint_A \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A} \qquad (5-145)$$

式中，V是闭合曲面A包围的区域，dV是体元，$d\boldsymbol{A}$是曲面上的面元向量。由式（5—116），（3—97）有

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = v^l|_l$$

$$dV = \in_{ijk} dr^i ds^j dt^k$$

而向量$\boldsymbol{u}$，$d\boldsymbol{A}$可分别表为

$$\boldsymbol{v} = v^l \boldsymbol{g}_l$$

$$d\boldsymbol{A} = dA_k \boldsymbol{g}^k$$

于是，式（5—145）可以写为

$$\iiint_V v^l|_l \in_{ijk} dr^i ds^j dt^k = \oint\!\!\!\oint_A v^l dA_l \qquad (5-146)$$

或把积分号简写，为

$$\int_V v^l|_l \in_{ijk} dr^i ds^j dt^k = \oint_A v^l dA_l \qquad (5-146')$$

在二维情形下（平面或曲面），高斯散度定理可以写为

$$\iint_A v^\gamma|_\gamma \in_{\alpha\beta} dr^\alpha ds^\beta = \oint_C v^\gamma dn_\gamma \qquad (5-147)$$

或

$$\int_A v^\gamma|_\gamma \in_{\alpha\beta} dr^\alpha ds^\beta = \oint_C v^\gamma dn_\gamma \qquad (5-147')$$

式中，α，β，γ在1和2范围取值。A是闭合曲线C所围的区域，$d\boldsymbol{s}$是C上的线元向量

$$d\boldsymbol{s} = ds^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha$$

$d\boldsymbol{s}$的正向使A的内部总在它的左侧。$d\boldsymbol{n}$是一个法向量，它的方向是C的外法线方向并与曲面相切，其长度等于$d\boldsymbol{s}$的长度，

即

$$d\boldsymbol{n}=d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{e}_3=ds^{\alpha}\in_{\alpha 3\beta}\boldsymbol{g}^{\beta}=dn_{\beta}\boldsymbol{g}^{\beta}$$

所以

$$dn_{\beta}=ds^{\alpha}\in_{\beta\alpha}$$

而

$$dA=dr^{\alpha}ds^{\beta}\in_{\alpha\beta}$$

2. 斯托克斯定理

在附录中，式（110）给出斯托克斯定理的不变性表示，它可以写为

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_A(\text{rot }\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{A} \qquad (5-148)$$

式中，A是闭合曲线C所围的区域，$d\boldsymbol{s}$是C上的线元向量，$d\boldsymbol{A}$是曲面上的面元向量，表示为

$$d\boldsymbol{A}=dr^{m}dt^{n}\in_{mnl}\boldsymbol{g}^{l}$$

而由式（5—121），有

$$\text{rot }\boldsymbol{v}=v_j|_i\in^{ijk}\boldsymbol{g}_k$$

代入式（5—148）后得到

$$\oint_C v_i ds^i=\in^{ijk}\in_{mnk}\iint_A v_j|_i dr^m dt^n \qquad (5-149)$$

或

$$\oint_C v_i ds^i=\in^{ijk}\in_{mnk}\int_A v_j|_i dr^m dt^n \qquad (5-149')$$

第六章　张量的某些应用

第一节　曲　线　坐　标

在上一章我们研究了张量的协变导数，它对任何坐标系都适用，同时又具有张量性质，这就为把物理上的基本方程在任意坐标系中表示提供了极其重要的工具。

下面的讨论限于三维欧氏空间内的曲线坐标。

假设三维欧氏空间中的笛卡尔直角坐标系为$ox_1x_2x_3$，一般的曲线坐标用上标分量x^1，x^2，x^3表示之。于是有

$$x_m = x_m(x^1,\ x^2,\ x^3) \qquad (6-1)$$

假设可由上式反解出x^1，x^2，x^3，并表为

$$x^i = x^i(x_1,\ x_2,\ x_3) \qquad (6-2)$$

曲面$x^1(x_1,\ x_2,\ x_3)=c_1$，$x^2(x_1,\ x_2,\ x_3)=c_2$，$x^3(x_1,\ x_2,\ x_3)=c_3$（其中c_1，c_2，c_3为常量），分别称为坐标曲面，每两个坐标曲面的交线称为坐标曲线（见图6－1）。

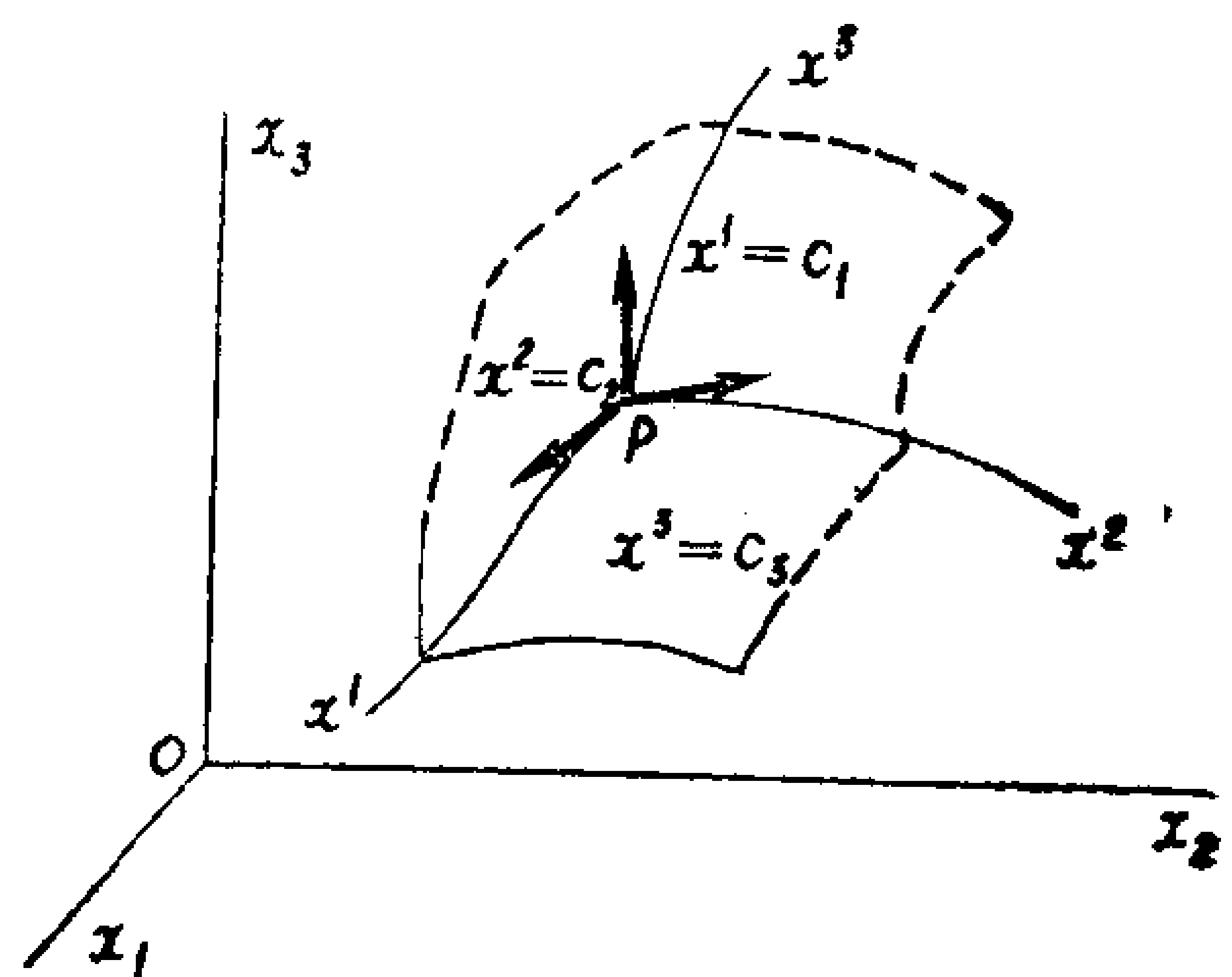


图　6－1

在空间中无限接近两点间的距离，利用笛卡尔直角坐标表示，为

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \qquad (6-3)$$

用曲线坐标则表示为

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \qquad (6-4)$$

由式（3－28），度量张量的协变分量为

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3)=\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial x_m}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x^j} \qquad (6-5)$$

然后，由式（3—30）或（3—30′）可求得度量张量的逆变分量g^{ij}。

对于正交曲线坐标系，由式（3—29），有

$$\left.\begin{aligned} &g_{ij}=0 \quad (i\neq j)\\ &g_{ii}=\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{\partial x_m}{\partial x^i}\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (6-6)$$

而

$$\left.\begin{aligned} &g^{ij}=0 \quad (i\neq j)\\ &g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}} \end{aligned}\right\} \qquad (6-7)$$

令

$$h_i^2=\left(\frac{\partial x_1}{\partial x^i}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial x^i}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial x^i}\right)^2 \qquad (6-8)$$

则在正交坐标系中，度量张量满足关系式

$$g_{ij}=\begin{cases} h_i^2 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \qquad (6-9)$$

系数

$$g_{ii}=h_i^2 \text{ 或 } h_i=\sqrt{g_{ii}} \qquad (6-10)$$

称为拉梅（Lamé）系数。

在正交坐标系中

$$g^{ii}=\frac{1}{h_i^2} \qquad (6-11)$$

$$g=h_1^2h_2^2h_3^2 \text{ 或 } \sqrt{g}=h_1h_2h_3 \qquad (6-12)$$

由式（2—46），如位置向量表为$\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$，则协变基向量为

$$\mathbf{g}_i=\frac{\partial x_1}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial x_2}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial x_3}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_3 \qquad (6-13)$$

由此及式（6—8），显然有

$$|\mathbf{g}_i|=h_i \qquad (6-14)$$

即在正交坐标系中，拉梅系数表示基向量的模。

在正交坐标系中，组成活动标架的三个相互垂直的基向量往往采用单位基向量。如仍采用记号$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$表示正交曲线坐标系的单位基向量*)，则

$$\boldsymbol{g}_i = h_i \boldsymbol{e}_i \qquad (6-15)$$

（不求和）

或

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{g}_i}{h_i} = \frac{\boldsymbol{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \qquad (6-16)$$

注 意 到 $\boldsymbol{g}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$，拉梅系数也可以写为

$$h_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\right| \qquad (6-17)$$

任一向量$\boldsymbol{a}$在正交曲线坐标系中，用协变基向量表为

$$\boldsymbol{a} = a^1 \boldsymbol{g}_1 + a^2 \boldsymbol{g}_2 + a^3 \boldsymbol{g}_3$$

将式（6—15）代入，得

$$\boldsymbol{a} = a^1 h_1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 h_2 \boldsymbol{e}_2 + a^3 h_3 \boldsymbol{e}_3$$

这样，就得到了正交坐标系时，向量的物理分量，为

$$a_{(i)} = a^i h_i = \frac{a_i}{h_i} \text{（不求和）} \qquad (6-18)$$

注意到式（6—10），上式与式（4—57）是一致的。

由式（4—59），在正交坐标系中，二阶张量的物理分量

$$T_{(i)(j)} = T^{ij} h_i h_j = \frac{T_{ij}}{h_i h_j} \text{（不求和）} \qquad (6-19)$$

对于高阶张量依此类推。

下面我们研究正交曲线坐标下的一些基本量的表示：

1. 线元弧长

由式（3—15）和（6—9），得

$$ds^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2 \qquad (6-20)$$

显然，$h_1 dx^1$，$h_2 dx^2$，$h_3 dx^3$分别是沿x^1，x^2，x^3线弧长的微分，如用ds_1，ds_2，ds_3表示，则有

---

*）笛卡尔直角坐标系中也常采用这组记号，但不会混淆。

$$ds_1=h_1dx^1,\ ds_2=h_2dx^2,\ ds_3=h_3dx^3 \qquad (6-21)$$

2. 面　　元

由两条坐标曲线形成的面元，分别为

$$dA_1=h_2h_3dx^2dx^3,\ dA_2=h_3h_1dx^3dx^1,$$
$$dA_3=h_1h_2dx^1dx^2 \qquad (6-22)$$

3. 体　　元

由式（3—76）和（6—12）立即得到

$$dV=h_1h_2h_3dx^1dx^2dx^3 \qquad (6-23)$$

它是由$d\boldsymbol{s}_1=h_1dx^1\boldsymbol{e}_1$，$d\boldsymbol{s}_2=h_2dx^2\boldsymbol{e}_2$，$d\boldsymbol{e}_3=h_3dx^3\boldsymbol{e}_3$组成的体元（图6—2）。

4. 梯　　度

由式（5—113）和（6—15），得

$$\nabla\phi=\text{grad}\ \phi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\boldsymbol{e}_3 \qquad (6-24)$$

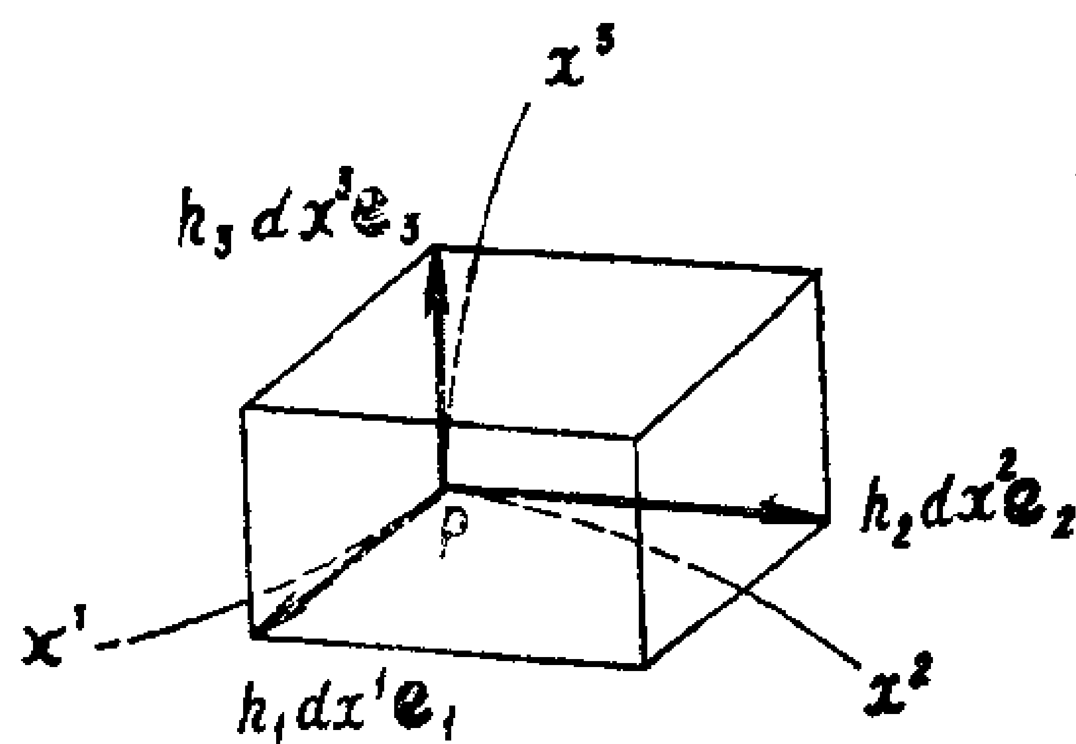


图　6—2

5. 散　　度

如果用$v_{(i)}$表示物理分量，由式（6—18）有

$$v^i=\frac{v_{(i)}}{h_i}$$

为书写简便，去掉$v_{(i)}$下标中的圆括号，由式（5—120）得出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\text{div}\ \boldsymbol{v}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(h_2h_3v_1)+\frac{\partial}{\partial x^2}(h_3h_1v_2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(h_1h_2v_3)\right] \qquad (6-25)$$

6. 旋　　度

由式（6—18）有$v_i=h_iv_{(i)}$，利用式（5—128），（6—12），（6—15），并去掉$v_{(i)}$下标中的圆括号得到

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\text{rot}\ \boldsymbol{v}=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}(h_3v_3)-\frac{\partial}{\partial x^3}(h_2v_2)\right]\boldsymbol{e}_1+$$

$$+\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x^3}(h_1v_1)-\frac{\partial}{\partial x^1}(h_3v_3)\right]e_2$$

$$+\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(h_2v_2)-\frac{\partial}{\partial x^2}(h_1v_1)\right]e_3 \quad (6-26)$$

7. 拉普拉斯算子

由式（5—134），（6—11），（6—12），得

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\ \frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\ \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\ \frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)\right] \quad (6-27)$$

例题 求出柱坐标系和球坐标系中的拉梅系数。

在柱坐标中，取$x^1=r$，$x^2=\theta$，$x^3=z$，于是

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z \quad (a')$$

其中 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$-\infty<z<\infty$

利用式（6—8）求得

$$h_r=1,\ h_\theta=r,\ h_z=1 \quad (b')$$

在球坐标中，取$x^1=r$，$x^2=\theta$，$x^3=\varphi$，则

$$x=r\cos\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\cos\varphi,\ z=r\sin\varphi \quad (c')$$

其中 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$

利用式（6—8）求得

$$h_r=1,\ h_\theta=r\cos\varphi,\ h_\varphi=r \quad (d')$$

求得拉梅系数后，就可以利用前面的公式计算正交坐标系中的梯度、散度、旋度等所需要的公式。

第二节 弹性力学基本方程的张量方程

利用张量的方法很容易把在笛卡尔直角坐标系中表示的各类基本方程式写成张量方程，从而方便的导出基本方程式在欧几里德空间的各类曲线坐标中的具体表达式。本节以弹性力学方程为例进行这类推导。

一、笛卡尔直角坐标系中的弹性力学方程

1. 平衡微分方程式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned}
\qquad (6-28)
$$

2. 几何方程式

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\\
&\gamma_{yx}=\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},\quad \gamma_{zy}=\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\
&\gamma_{xz}=\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned}
\qquad (6-29)
$$

3. 物理方程式

各向同性线性弹性体应力和应变之间的关系为

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)\right],\quad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}\\
&\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)\right],\quad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}\\
&\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)\right],\quad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned}
\qquad (6-30)
$$

4. 应力边界条件

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n=\widetilde{X}\\
&\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n=\widetilde{Y}\\
&\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n=\widetilde{Z}
\end{aligned}
\qquad (6-31)
$$

式中，l，m，n 为边界表面外法线的方向余弦；$\widetilde{X}$，$\widetilde{Y}$，$\widetilde{Z}$ 为表面力分量。

二、弹性力学方程的张量方程

1. 平衡微分方程式

引用记号$\sigma^{11}=\sigma_x$，$\sigma^{12}=\tau_{xy}$，…；$X^1=X$，$X^2=Y$，$X^3=Z$；$x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$。式（6—28）可以写为$\sigma^{ij}{}_{,j}+X^i=0$，把普通导数改成协变导数则得到平衡微分方程式的张量方程

$$\sigma^{ij}|_j+X^i=0 \qquad (6—32)$$

注意到式（5—119），上式中的$\sigma^{ij}|_j$表示应力张量$\boldsymbol{\sigma}$的散度，则式（6—32）可以表示为不变形式，即

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{X}=0 \qquad (6—32')$$

2. 几何方程式

对于应变和位移引用记号$\varepsilon_{11}=\varepsilon_x$，$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}$，…；$u_1=u$，$u_2=v$，$u_3=w$。则几何方程式的张量形式为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_i|_j+u_j|_i) \qquad (6—33)$$

所以在小变形情形下，应变张量ε_{ij}是相对位移张量$u_i|_j$的对称部分。它的反对称部分$\frac{1}{2}(u_i|_j-u_j|_i)$与转动向量$\omega^k$的关系为

$$-2\omega^k=u_i|_j\in^{ijk} \qquad (6—34)$$

注意到式（5—121），（5—123），有

$$\omega^k\boldsymbol{g}_k=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{u} \qquad (6—35)$$

在笛卡尔直角坐标系中，在oxy平面内，式（6—34）变为

$$\omega^3=\frac{1}{2}(u_{2,1}-u_{1,2})$$

很明显，它就是弹性力学中微元体绕z轴的刚性转角。

按应力求解弹性力学问题时常用圣维南（Saint Venant）连续性方程式来代替几何方程式（6—33）。为了导出它的张量方程，由式（6—33）有

$$2\varepsilon_{ij}|_{kl}=u_i|_{jkl}+u_j|_{ikl}$$

用$\in^{jln}$和$\in^{ikm}$乘上式，注意到$u_i|_{jkl}$关于j，l对称，所以$u_i|_{jkl}\in^{jln}=0$，$u_j|_{ikl}$关于i，k对称，所以$u_j|_{ikl}\in^{ikm}=0$，于是有

$$\varepsilon_{ij}|_{kl}\in^{jln}\in^{ikm}=0 \qquad (6-36)$$

该式就是张量形式的连续性方程式。对于m，n取不同的数值，式（6—36）可得出六个分量形式的方程；$mn=11$，22，33，12，23，31。例如$m=n=3$，得

$$\varepsilon_{11}|_{22}\in^{123}\in^{123}+\varepsilon_{12}|_{21}\in^{123}\in^{213}+\varepsilon_{21}|_{21}\in^{213}\in^{123}$$
$$+\varepsilon_{22}|_{11}\in^{213}\in^{213}=0$$

将式（3—38）的置换张量代入，上式变为

$$\varepsilon_{11}|_{22}+\varepsilon_{22}|_{11}=2\varepsilon_{12}|_{12} \qquad (6-37)$$

在笛卡尔直角坐标系，上式可以写为

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

如取$m=2$，$n=3$得

$$\varepsilon_{11}|_{32}\in^{132}\in^{123}+\varepsilon_{12}|_{31}\in^{132}\in^{213}+\varepsilon_{31}|_{12}\in^{312}\in^{123}$$
$$+\varepsilon_{32}|_{11}\in^{312}\in^{213}=0$$

或

$$\varepsilon_{11}|_{32}=\varepsilon_{12}|_{31}+\varepsilon_{31}|_{12}-\varepsilon_{32}|_{11} \qquad (6-38)$$

在笛卡尔直角坐标系，为

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)$$

另外四个关系式也可类似地得出。

3. 物理方程式

对各向同性线性弹性体，式（6—30）还可以写为另外一种形式，即

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\lambda e+2G\varepsilon_x,\quad \tau_{xy}=G\gamma_{xy}\\ \sigma_y&=\lambda e+2G\varepsilon_y,\quad \tau_{yz}=G\gamma_{yz}\\ \sigma_z&=\lambda e+2G\varepsilon_z,\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx}\end{aligned} \qquad (6-39)$$

式中
$$G=\frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (6-40)$$

$$\lambda=\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \qquad (6-41)$$

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \qquad (6-42)$$

若采用张量记法，并把应力和应变都用混变张量表示，例如，$\sigma^1_1=\sigma_x$，$\sigma^1_2=\tau_{xy}$，…，$\varepsilon^1_1=\varepsilon_x$，$\varepsilon^1_2=\frac{1}{2}\gamma_{xy}$，…，则$e=\varepsilon^m_m$，于是式（6—39）可以统一写为

$$\sigma^i_j=2G\varepsilon^i_j+\lambda\varepsilon^m_m\delta^i_j \qquad (6-43)$$

这是用应变表示应力的张量方程，对于任何坐标系都是成立的。为了得到用应力表示应变的张量方程，将式（6—43）缩并，得

$$\sigma^i_i=\frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon^i_i+\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon^m_m\right)=\frac{E}{1-2\mu}\varepsilon^m_m \qquad (6-44)$$

由此得到$\varepsilon^m_m=\frac{1-2\mu}{E}\sigma^m_m$，代入式（6—43），整理后得

$$E\varepsilon^i_j=(1+\mu)\sigma^i_j-\mu\sigma^m_m\delta^i_j \qquad (6-45)$$

如果把应力用逆变张量表示，应变用协变张量表示，式（6—43）和（6—45）分别为

$$\sigma^{ij}=(2Gg^{il}g^{jm}+\lambda g^{ij}g^{lm})\varepsilon_{lm} \qquad (6-43')$$

及
$$E\varepsilon_{ij}=[(1+\mu)g_{il}g_{jm}-\mu g_{ij}g_{lm}]\sigma^{lm} \qquad (6-45')$$

对于线性弹性材料，如果不限于各向同性，一般地可以把应力张量σ^{ij}的每一个分量用应变张量ε_{lm}全部分量的线性组合来表示，即

$$\sigma^{ij}=E^{ijlm}\varepsilon_{lm} \qquad (6-46)$$

这也就是一般的各向异性弹性体的虎克定律。弹性模数E^{ijlm}包含$3^4=81$个分量，但并不是全部独立的。因为σ^{ij}，ε_{lm}都是二阶张量，根据商法则，E^{ijlm}是一个四阶张量，称为弹性张量。

下面我们研究弹性张量的性质。

因为$\sigma^{ij}=\sigma^{ji}$，所以有

$$\sigma^{ji}=E^{jilm}\varepsilon_{lm}=E^{ijlm}\varepsilon_{lm}$$

故必有

$$E^{ijlm}=E^{jilm} \qquad (6-47)$$

又因为$\varepsilon_{lm}=\varepsilon_{ml}$，总可以选择使$E^{ijlm}=E^{ijml}$。为此，由

$$\sigma^{ij}=\frac{1}{2}\sigma^{ij}+\frac{1}{2}\sigma^{ij}$$

$$=\frac{1}{2}E^{ijlm}\varepsilon_{lm}+\frac{1}{2}E^{ijml}\varepsilon_{ml}$$

$$=\frac{1}{2}(E^{ijlm}+E^{ijml})\varepsilon_{lm}$$

选取$E^{ijlm}+E^{ijml}$作为新的模量即满足关于l，m对称的要求，我们仍用原来的记号，于是有

$$E^{ijlm}=E^{jilm}=E^{ijml}=E^{jiml} \qquad (6-48)$$

该式表明，指标i与j，l与m是对称的，可以交换顺序，所以关于ij，lm各有六对指标（11，12，13，22，23，33）是不同的，E^{ijlm}不同值的个数最多有$6^2=36$个，实际上，由于应变能的存在，不同值的个数还将进一步减少。

应用现在的记号，笛卡尔直角坐标系中单位体积应变能表达式$a=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\cdots+\tau_{zx}\gamma_{zx})$可以写为

$$a=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij} \qquad (6-49)$$

这是个张量形式的方程，是由应力张量与应变张量对两对指标连并得到的，因而是标量，在所有的坐标系中都成立。

由弹性理论知道，对于应力和应变的微小增量，a的增量是现有的应力对应变增量所作的功，即

$$da=\sigma^{ij}d\varepsilon_{ij} \qquad (6-50)$$

另一方面，我们形式的导出da的表达式，并利用式（6—49）和（6—46），有

$$da=\frac{\partial a}{\partial\sigma^{ij}}d\sigma^{ij}+\frac{\partial a}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}$$

$$=\frac{\partial a}{\partial\sigma^{ij}}\cdot\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial\varepsilon_{lm}}d\varepsilon_{lm}+\frac{\partial a}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}$$

$$=\left(\frac{\partial a}{\partial\sigma^{lm}}\cdot\frac{\partial\sigma^{lm}}{\partial\varepsilon_{ij}}+\frac{\partial a}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)d\varepsilon_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}(\varepsilon_{lm}E^{lmij}+\sigma^{ij})d\varepsilon_{ij} \qquad (6-51)$$

对比式（6—50）、（6—51），为消去$d\varepsilon_{ij}$可以选择一系列特殊情形，由于$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$，不能全部任意选择九个$d\varepsilon_{ij}$，但总可以选择一对指标$ij$，并使只有$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ji}\neq 0$。于是，对这组$ij$有下式成立

$$\sigma^{ij}d\varepsilon_{ij}+\sigma^{ji}d\varepsilon_{ji}=\frac{1}{2}(\varepsilon_{lm}E^{lmij}+\sigma^{ij})d\varepsilon_{ij}$$

$$+\frac{1}{2}(\varepsilon_{lm}E^{lmji}+\sigma^{ji})d\varepsilon_{ji} \qquad \text{(不求和)}$$

这时可以消去各项中的应变增量，得到

$$\sigma^{ij}+\sigma^{ji}=\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{lm}(E^{lmij}+E^{lmji})+(\sigma^{ij}+\sigma^{ji})\right]$$

于是，利用应力张量的对称性和式（6—48）的关系，得

$$\sigma^{ij}=E^{lmij}\varepsilon_{lm} \qquad (6-52)$$

对比式（6—52）与（6—46），有

$$E^{ijlm}=E^{lmij} \qquad (6-53)$$

该式说明，弹性张量的前一对指标和后一对指标也是对称的，即可以互换。这样一来，E^{ijlm} 中独立分量的个数从36减少到21个。

在各向同性材料中只有两个独立弹性常数，常用工程弹性常数E和μ或 $G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$和 $\lambda=\dfrac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$表示。为了得到弹性张量 E^{ijlm} 的分量与工程弹性常数间的关系，将式（6—39）改写为

$$\sigma^{11}=(\lambda+2G)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{33},\quad \sigma^{12}=G(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})$$

$$\sigma^{22}=\lambda\varepsilon_{11}+(\lambda+2G)\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{33},\quad \sigma^{23}=G(\varepsilon_{23}+\varepsilon_{32})$$

$$\sigma^{33}=\lambda\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}+(\lambda+2G)\varepsilon_{33},\quad \sigma^{31}=G(\varepsilon_{31}+\varepsilon_{13})$$

$$(6-54)$$

对比式（6—46）与式（6—54），可以得到

$$E^{1111}=E^{2222}=E^{3333}=\lambda+2G$$

$$E^{1122}=E^{1133}=E^{2211}=E^{2233}=E^{3311}=E^{3322}=\lambda$$

$$E^{1212}=E^{1221}=E^{2112}=E^{2121}=E^{2323}=E^{2332}$$
$$=E^{3223}=E^{3232}=E^{3131}=E^{3113}=E^{1331}=E^{1313}=G \tag{6-55}$$

除了这21个分量外，其余的全部为零。例如：

$$E^{1112}=E^{1222}=E^{1223}=0$$

注意到在笛卡尔直角坐标系中逆变度量张量$g^{ii}=1$（不求和），$g^{ij}=0$（$i\neq j$），上述弹性模量可以概括为统一的公式

$$E^{ijlm}=\lambda g^{ij}g^{lm}+G(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl}) \tag{6-56}$$

该式在笛卡尔直角坐标系的正确性可以直接得到验证。例如，取$i=j=1$，$l=m=2$，得$E^{1122}=\lambda$，等等。但是式（6—56）是一个张量方程，所以适合于任何其它的曲线坐标系。如用E，μ表示，上式还可以写为

$$E^{ijlm}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{2\mu}{1-2\mu}g^{ij}g^{lm}+g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl}\right) \tag{6-57}$$

4. 应力边界条件

引用记号$n_1=l$，$n_2=m$，$n_3=n$；$\widetilde{X}^1=\widetilde{X}$，$\widetilde{X}^2=\widetilde{Y}$，$\widetilde{X}^3=\widetilde{Z}$，式（6—31）可以写为

$$\sigma^{ij}n_i=\widetilde{X}^j \tag{6-58}$$

这也是张量方程，故在任何坐标系中成立。

例题 1 弹性力学中的纳维尔-拉梅方程为

$$(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+G\nabla^2u+X=0$$
$$(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+G\nabla^2v+Y=0 \tag{a'}$$
$$(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+G\nabla^2w+Z=0$$

试把该方程写成张量方程。

利用张量的分量记法，上式写为

$$(\lambda+G)u^k|_k^i+Gu^i|_k^k+X^i=0 \tag{b'}$$

该式也可以采用不变性记法，写成向量方程：

$$(\lambda+G)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+G\nabla^2\boldsymbol{u}+X=0 \qquad (c')$$

例题 2 弹性力学平面问题，在不计体积力时，应力函数 φ 满足重调和方程式，即

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=0 \qquad (a')$$

试把该方程写为分量形式的张量方程。

重调和方程是两个调和算子作用，所以上式很容易写为

$$\varphi\,|^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}=0 \qquad (b')$$

三、特殊坐标系中的方程

一般说来，在笛卡尔直角坐标系建立物理问题的基本方程式是比较方便的，但是这样的方程在其它坐标系就不适用了，因此我们建立了任何坐标系都成立的张量方程。不过从应用的角度，在具体解决问题时终归要在某个特殊的坐标系中进行。直接在这些坐标系中建立方程是麻烦的，而且容易出错。但是利用张量方程得到它们则是方便的，并且有章可循。所以我们所采取的办法是：特殊（直角坐标系）——一般（张量方程）——特殊（其它坐标系）。下面我们就来解决如何从一般到特殊的问题。

1． 建立用柱坐标表示的弹性力学基本方程式。

（1）平衡微分方程式

根据协变导数的定义，利用式（5—42）可将式（6—32）写为

$$\sigma^{ji}{}_{,j}+\sigma^{lj}\Gamma^{i}_{jl}+\sigma^{il}\Gamma^{j}_{jl}+X^i=0 \qquad (6-59)$$

由第五章例题3知，对于柱坐标有 $\Gamma^{r}_{\theta\theta}=-r$，$\Gamma^{\theta}_{\theta r}=\Gamma^{\theta}_{r\theta}=1/r$，于是式（6—59）可写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma^{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma^{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma^{zr}}{\partial z}-\sigma^{\theta\theta}\cdot r+\frac{\sigma^{rr}}{r}+X^r=0\\
&\frac{\partial\sigma^{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma^{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma^{z\theta}}{\partial z}+\frac{2\sigma^{r\theta}}{r}+\frac{\sigma^{\theta r}}{r}+X^\theta=0 \qquad (a)\\
&\frac{\partial\sigma^{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma^{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma^{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma^{zr}}{r}+X^z=0
\end{aligned}$$

如果把σ_{rr}，$\sigma_{\theta\theta}$，σ_{zz}，$\sigma_{r\theta}$，$\sigma_{\theta z}$，σ_{zr}及F_r，F_θ，F_z作为物理分量，由式（4—59）、（4—57）有

$$\sigma^{rr}=\frac{\sigma_{rr}}{g_{rr}}=\sigma_{rr}\,,\quad \sigma^{\theta\theta}=\frac{\sigma_{\theta\theta}}{g_{\theta\theta}}=\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r^2},\quad \sigma^{zz}=\frac{\sigma_{zz}}{g_{zz}}=\sigma_{zz}$$

$$\sigma^{r\theta}=\frac{\sigma_{r\theta}}{\sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}}}=\frac{\sigma_{r\theta}}{r},\quad \sigma^{\theta z}=\frac{\sigma_{\theta z}}{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{zz}}}=\frac{\sigma_{\theta z}}{r},$$

$$\sigma^{zr}=\frac{\sigma_{zr}}{\sqrt{g_{zz}g_{rr}}}=\sigma_{zr} \tag{b}$$

及

$$X^r=F_r,\ X^\theta=\frac{F_\theta}{r},\ X^z=F_z \tag{c}$$

将式（b）、（c）代入（a），稍加整理便得到

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+F_r=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}+F_\theta=0 \tag{6—60}$$

$$\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{zr}}{r}+F_z=0$$

这正是通常见到的用柱坐标表示的平衡方程式。

（2）几何方程式

利用协变导数的定义，由张量方程式（6—33）得

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-u_m\Gamma^m_{ij} \tag{6—61}$$

它包含有六个方程，例如$i=j=2$，注意到$\Gamma^1_{22}=-r$，由上式有

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+u_1 r \tag{d}$$

用ε_{rr}，$\varepsilon_{\theta\theta}$，$\varepsilon_{zz}$，$\gamma_{r\theta}$，$\gamma_{\theta z}$，$\gamma_{zr}$及$u_r$，$u_\theta$，$u_z$表示物理分量（注意$\gamma_{r\theta}=2\varepsilon_{r\theta}$），并应用式（4—59）、（4—57）有

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{rr}=\varepsilon_{11},\quad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{\varepsilon_{22}}{r^2},\quad \varepsilon_{zz}=\varepsilon_{33}\\&\varepsilon_{r\theta}=\frac{\varepsilon_{12}}{r},\quad \varepsilon_{\theta z}=\frac{\varepsilon_{23}}{r},\quad \varepsilon_{zr}=\varepsilon_{31}\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

及

$$u_r=u_1,\quad u_\theta=\frac{u_2}{r},\quad u_z=u_3\tag{f}$$

将式（e）、（f）代入（d），得

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}$$

类似地可以推导出另外五个方程，把它们综合写为

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}\\&\gamma_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r},\ \gamma_{\theta z}=\frac{\partial u_z}{r\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\\&\gamma_{zr}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\end{aligned}\tag{6—62}$$

（3）物理方程式

由式（6—43′），注意到这时$g^{11}=1$，$g^{22}=\frac{1}{r^2}$，$g^{33}=1$，$g^{ij}=0$（$i\neq j$）以及式（b）和（e），得

$$\begin{aligned}&\sigma_{rr}=2G\varepsilon_{rr}+\lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})\\&\sigma_{\theta\theta}=2G\varepsilon_{\theta\theta}+\lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})\\&\sigma_{zz}=2G\varepsilon_{zz}+\lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})\\&\tau_{r\theta}=G\gamma_{r\theta},\quad \tau_{\theta z}=G\gamma_{\theta z},\quad \tau_{zr}=G\gamma_{zr}\end{aligned}\tag{6—63}$$

对于各向同性体，这一结果是可以预料到的。

2. 建立用球坐标表示的弹性力学基本方程式。

（1）平衡微分方程式

在这里，我们从式（6—32′）出发，因为它可以直接利用二阶张量的散度公式。由第五章第六节例题3的式（g'），并用F_r，F_θ，F_φ表示X的物理分量，就可以得到

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\varphi}\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{r\partial\varphi}+\frac{2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi}-\mathrm{tg}\varphi\sigma_{r\theta}}{r}+F_r=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\varphi}\ \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{r\partial\varphi}$$
$$+\frac{3\sigma_{r\theta}-2\mathrm{tg}\varphi\sigma_{\theta\varphi}}{r}+F_{\theta}=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\varphi}\ \frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{r\partial\varphi}$$
$$+\frac{3\sigma_{r\varphi}+\mathrm{tg}\varphi(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi})}{r}+F_{\varphi}=0$$

(6—64)

（2）几何方程式

由第五章例题4，在球坐标中$\Gamma^1_{22}=-r\cos^2\varphi$，$\Gamma^3_{22}=\cos\varphi\sin\varphi$，$\Gamma^1_{33}=-r$，$\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=\frac{1}{r}$，$\Gamma^2_{32}=\Gamma^2_{23}=-\mathrm{tg}\varphi$，$\Gamma^3_{31}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r}$，其余为零。于是，式（6—61）的六个方程为

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=u_{1,1}\\
&\varepsilon_{22}=u_{2,2}+r\cos^2\varphi u_1-\cos\varphi\sin\varphi u_3\\
&\varepsilon_{33}=u_{3,3}+ru\\
&\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1})-\frac{u_2}{r}\\
&\varepsilon_{23}=\frac{1}{2}(u_{2,3}+u_{3,2})+\mathrm{tg}\varphi u_2\\
&\varepsilon_{31}=\frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1})-\frac{u_3}{r}
\end{aligned}\qquad (g)$$

由第三章例题2得到，球坐标时$g_{rr}=1$，$g_{\theta\theta}=r^2\cos^2\varphi$，$g_{\varphi\varphi}=r^2$，$g_{ij}=0$（$i\neq j$）。由式（4—59）及（4—57）得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=\varepsilon_{rr},\quad \varepsilon_{22}=r^2\cos^2\varphi\varepsilon_{\theta\theta},\quad \varepsilon_{33}=r^2\varepsilon_{\varphi\varphi}\\
&\varepsilon_{12}=r\cos\varphi\varepsilon_{r\theta},\quad \varepsilon_{23}=r^2\cos\varphi\varepsilon_{\theta\varphi},\quad \varepsilon_{31}=r\varepsilon_{\varphi r}
\end{aligned}\qquad (h)$$
$$(\gamma_{ij}=2\varepsilon_{ij},\quad i\neq j)$$

及

$$u_1=u_r,\quad u_2=r\cos\varphi u_{\theta},\quad u_3=ru_{\varphi}\qquad (i)$$

将式（h）、（i）代入（g），整理后得

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r\cos\varphi}\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}-\frac{\mathrm{tg}\varphi}{r}u_\varphi$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}$$

（6—65）

$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r\cos\varphi}\ \frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}$$

$$\gamma_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\cos\varphi}\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{tg}\varphi}{r}u_\theta$$

$$\gamma_{\varphi r}=\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}$$

（3）物理方程式

因为是正交坐标系，所以可以直接写出，从略

3．任意正交坐标系中的弹性力学基本方程式。

（1）平衡微分方程式

一般的平衡微分方程式是式（6—32′），应力张量的散度可由式（5—144）确定。对于正交坐标系

$$(\mathrm{div}\,\sigma)_1=\frac{1}{\sqrt{g}}\ \frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{11}\sigma^{k1})}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\sigma^{kn}\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{11}\sigma^{11})}{\partial x^1}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{11}\sigma^{21})}{\partial x^2}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{11}\sigma^{31})}{\partial x^3}\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+\sigma^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+\sigma^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right)$$

$$(\mathrm{div}\,\sigma)_2=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{22}\sigma^{k2})}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\sigma^{kn}\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{22}\sigma^{12})}{\partial x^1}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{22}\sigma^{22})}{\partial x^2}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{22}\sigma^{32})}{\partial x^3}\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right.$$

$$+\sigma^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}+\sigma^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\Big)$$

$$(\mathrm{div}\,\sigma)_3=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{33}\sigma^{k3})}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\sigma^{kn}\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\Big(\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{33}\sigma^{13})}{\partial x^1}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{33}\sigma^{23})}{\partial x^2}$$

$$+\frac{\partial(\sqrt{g}\,g_{33}\sigma^{33})}{\partial x^3}\Big)-\frac{1}{2}\Big(\sigma^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$+\sigma^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}+\sigma^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\Big)$$

$$(j)$$

如用$\sigma_{x_1x_1}$，$\sigma_{x_2x_2}$，…，$\sigma_{x_3x_1}$表示应力张量的物理分量，用F_{x_1}，F_{x_2}，F_{x_3}表示体积力向量的物理分量，注意到式（6—10）、（6—12）、（6—18）、（6—19），平衡方程式可以写为

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[\frac{\partial(h_1h_2h_3\sigma_{x_1x_1})}{\partial x^1}+\frac{\partial(h_1^2h_3\sigma_{x_1x_2})}{\partial x^2}$$

$$+\frac{\partial(h_1^2h_2\sigma_{x_1x_3})}{\partial x^3}\Big]-\Big(\frac{1}{h_1}\ \frac{\partial h_1}{\partial x^1}\sigma_{x_1x_1}$$

$$+\frac{1}{h_2}\ \frac{\partial h_2}{\partial x^1}\sigma_{x_2x_2}+\frac{1}{h_3}\ \frac{\partial h_3}{\partial x^1}\sigma_{x_3x_3}\Big)$$

$$+h_1F_{x_1}=0$$

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[\frac{\partial(h_2^2h_3\sigma_{x_1x_2})}{\partial x^1}+\frac{\partial(h_1h_2h_3\sigma_{x_2x_2})}{\partial x^2}$$

$$+\frac{\partial(h_1h_2^2\sigma_{x_3x_2})}{\partial x^3}\Big]-\Big(\frac{1}{h_1}\ \frac{\partial h_1}{\partial x^2}\sigma_{x_1x_1}$$

$$+\frac{1}{h_2}\ \frac{\partial h_2}{\partial x^2}\sigma_{x_2x_2}+\frac{1}{h_3}\ \frac{\partial h_3}{\partial x^2}\sigma_{x_3x_3}\Big)$$

$$+h_2F_{x_2}=0$$

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[\frac{\partial(h_2h_3^2\sigma_{x_1x_3})}{\partial x^1}+\frac{\partial(h_1h_3^2\sigma_{x_2x_3})}{\partial x^2}$$

$$+\frac{\partial(h_1h_2h_3\sigma_{x_3x_3})}{\partial x^3}\Big]-\Big(\frac{1}{h_1}\ \frac{\partial h_1}{\partial x^3}\sigma_{x_1x_1}$$
$$+\frac{1}{h_2}\ \frac{\partial h_2}{\partial x^3}\sigma_{x_2x_2}+\frac{1}{h_3}\ \frac{\partial h_3}{\partial x^3}\sigma_{x_3x_3}\Big)$$
$$+h_3F_{x_3}=0$$

（6—66）

或写成统一的公式

$$\frac{1}{h_i}\sum_{k=1}^{3}\Big\{\frac{1}{h_1h_2h_3}\ \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\frac{h_1h_2h_3h_i}{h_k}\sigma_{x_ix_k}\Big)$$
$$-\Big(\frac{1}{h_k}\ \frac{\partial h_k}{\partial x^i}\sigma_{x_kx_k}\Big)\Big\}+F_{x_i}=0$$

（6—66′）

（2）几何方程式

利用普遍公式（6—61），注意到关系式（5—17），（6—10），并用u_{x_1}，u_{x_2}，u_{x_3}以及$\varepsilon_{x_1x_1}$，$\varepsilon_{x_2x_2}$，…，$\gamma_{x_3x_1}$表示位移向量和应变张量的物理分量，则很容易得到正交曲线坐标的几何方程式。例如，$i=1$，$j=1$时，式（6—61）可以写为

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x^1}-\frac{1}{h_1}\ \frac{\partial h_1}{\partial x^1}u_1+\frac{h_1}{h_2^2}\ \frac{\partial h_1}{\partial x^2}u_2$$
$$+\frac{h_1}{h_3^2}\ \frac{\partial h_1}{\partial x^3}u_3$$

引入物理分量后稍加运算即可得到常见的形式，其余五个方程可作类似的推导，现一并写出于后。

$$\varepsilon_{x_1x_1}=\frac{1}{h_1}\ \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x^1}+\frac{1}{h_1h_2}\ \frac{\partial h_1}{\partial x^2}u_{x_2}$$
$$+\frac{1}{h_1h_3}\ \frac{\partial h_1}{\partial x^3}u_{x_3}$$

$$\varepsilon_{x_2x_2}=\frac{1}{h_2}\ \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x^2}+\frac{1}{h_2h_3}\ \frac{\partial h_2}{\partial x^3}u_{x_3}$$
$$+\frac{1}{h_2h_1}\ \frac{\partial h_2}{\partial x^1}u_{x_1}$$

$$\varepsilon_{x_3x_3}=\frac{1}{h_3}\frac{\partial u_{x_3}}{\partial x^3}+\frac{1}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial x^1}u_{x_1}+\frac{1}{h_3h_2}\frac{\partial h_3}{\partial x^2}u_{x_2}$$

$$\gamma_{x_1x_2}=2\varepsilon_{x_1x_2}=\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{u_{x_2}}{h_2}\right)+\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{u_{x_1}}{h_1}\right)$$

$$\gamma_{x_2x_3}=2\varepsilon_{x_2x_3}=\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{u_{x_3}}{h_3}\right)+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{u_{x_2}}{h_2}\right)$$

$$\gamma_{x_3x_1}=2\varepsilon_{x_3x_1}=\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{u_{x_1}}{h_1}\right)+\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{u_{x_3}}{h_3}\right)\tag{6—67}$$

或写为统一的公式

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{h_k}\frac{\partial u_{x_i}}{\partial x^k}+\frac{1}{h_i}\frac{\partial u_{x_k}}{\partial x^i}-\frac{1}{h_ih_k}\left[\frac{\partial h_i}{\partial x^k}u_{x_i}+\frac{\partial h_k}{\partial x^i}u_{x_k}\right]+2\delta^i_k\sum_{m=1}^{3}\frac{u_{x_m}}{h_ih_m}\frac{\partial h_i}{\partial x^m}\right\}\tag{6—67'}$$

（3）物理方程式

对于正交坐标系，应力应变关系具有非常简单的形式，就象在笛卡尔直角坐标系那样，只是把应力、应变用曲线坐标的记号代替即可。

第三节 曲　　面

在这里，我们研究三维欧几里德空间的曲面，它是一个二维黎曼空间。这对于研究薄壳弯曲问题是很有用的。为了确定曲面上任一点的位置，可以采取两种方式：其一是用笛卡尔直角坐标系 x_1，x_2，x_3 表示；其二是用曲面上的曲线坐标 x^1，x^2 表示。（图 6 — 3 ）。很明显，x_1，x_2，x_3必定是x^1和x^2的函数，即

$$\begin{aligned}x_1&=x_1(x^1,\ x^2)\\x_2&=x_2(x^1,\ x^2)\\x_3&=x_3(x^1,\ x^2)\end{aligned}\tag{6—68}$$

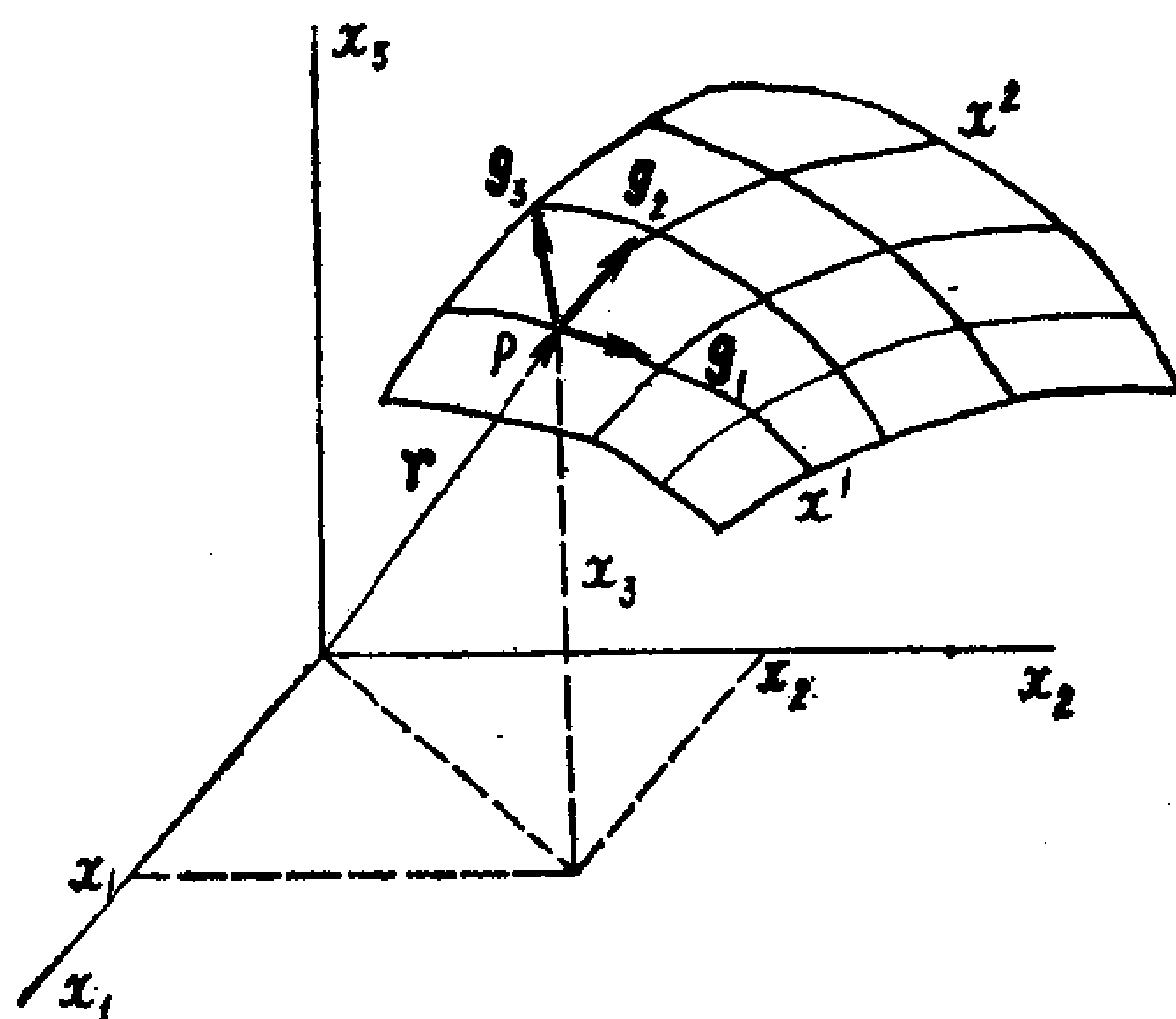


图 6—3

下面我们研究曲面上的各种量。

1． 曲面上线元的长度。第一基本形式

显然，用直角坐标表示时，曲面上无限接近两点间线元的弧长平方表为

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_{k=1}^{3} dx_k^2 \tag{a}$$

而

$$dx_k = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial x_k}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \tag{b}$$

所以

$$dx_k^2 = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial x_k}{\partial x^\alpha} dx^\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial x_k}{\partial x^\beta} dx^\beta\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial x_k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{c}$$

将式（c）代入（a）得

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial x_k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x^\beta}\right) dx^\alpha dx^\beta \tag{d}$$

设$\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$是曲面上任一点$P$的位置向量，$\boldsymbol{g}_1$、$\boldsymbol{g}_2$为与坐标线$x^1$、$x^2$相切的基向量，则

$$\boldsymbol{g}_\alpha=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial x^\alpha}\boldsymbol{e}_k$$

于是

$$g_{\alpha\beta}=\boldsymbol{g}_\alpha\cdot\boldsymbol{g}_\beta=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial x^\alpha}\ \frac{\partial x_k}{\partial x^\beta}\qquad(6-69)$$

将该式代入式（d）得

$$ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta\qquad(6-70)$$

注意到$g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$，则有

$$ds^2=g_{11}dx^1dx^1+2g_{12}dx^1dx^2+g_{22}dx^2dx^2\qquad(6-70')$$

系数$g_{\alpha\beta}$是曲面度量张量的分量，在曲面的微分几何里常把式（6—70′）称为第一基本形式，g_{11}、$g_{12}=g_{21}$、g_{22}分别用E、F、G表示。

曲面上活动标架的第三个基向量$\boldsymbol{g}_3$取为单位向量，并垂直于$\boldsymbol{g}_1$和$\boldsymbol{g}_2$，因此$\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{n}$，故有

$$g_{13}=\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_3=0,\quad g_{23}=\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_3=0$$
$$(6-71)$$
$$g_{33}=\boldsymbol{g}_3\cdot\boldsymbol{g}_3=1$$

所以，度量张量的全部分量为

$$[g_{ij}]=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & 0\\ g_{21} & g_{22} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\qquad(6-72)$$

而

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}\qquad(6-73)$$

2. 曲面上两向量间的夹角

设$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$是切于曲面上某P点的两个向量，可表为

$$\boldsymbol{u}=u^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha,\quad \boldsymbol{v}=v^\beta\boldsymbol{g}_\beta\quad(\alpha,\beta=1,2)$$

若此二向量夹角为θ，则有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta=(u^{\alpha}\boldsymbol{g}_{\alpha})\cdot(v^{\beta}\boldsymbol{g}_{\beta})=g_{\alpha\beta}u^{\alpha}v^{\beta} \qquad (e)$$

所以

$$\cos\theta=\frac{g_{\alpha\beta}u^{\alpha}v^{\beta}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \qquad (6-74)$$

或

$$\cos\theta=\frac{g_{\alpha\beta}u^{\alpha}v^{\beta}}{\sqrt{g_{\gamma\delta}u^{\gamma}u^{\delta}}\sqrt{g_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}}} \qquad (6-74')$$

基向量$\boldsymbol{g}_1$与$\boldsymbol{g}_2$之间的夹角θ_{12}可以表为

$$\cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \qquad (6-75)$$

3. 曲面上的微元面积

曲面上的线元在法线方向没有分量，故

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_{\alpha}dx^{\alpha} \qquad (6-76)$$

沿着坐标线有

$$d\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{g}_1dx^1,\quad d\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{g}_2dx^2$$

所以，面元向量可表为

$$d\boldsymbol{A}=d\boldsymbol{s}_1\times d\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2dx^1dx^2=\in_{12}dx^1dx^2\boldsymbol{g}^3$$

$$dA=\in_{12}dx^1dx^2 \qquad (6-77)$$

4. 克里斯托夫符号

由式（6—71）前二式$\boldsymbol{g}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_3=0$，微分得

$$\boldsymbol{g}_{\alpha,\beta}\cdot\boldsymbol{g}_3+\boldsymbol{g}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_{3,\beta}=0$$

由式（5—5）、（5—10）有

$$\Gamma_{\alpha\beta3}=-\Gamma_{3\beta\alpha}=\Gamma_{\beta\alpha3}=-\Gamma_{\beta3\alpha}=-\Gamma_{3\alpha\beta}=-\Gamma_{\alpha3\beta} \qquad (6-78)$$

对式（6—71）第三式微分得

$$\boldsymbol{g}_{3,\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_3=0$$

又由$\boldsymbol{g}_{3,3}\cdot\boldsymbol{g}_3=0$及$\boldsymbol{g}_{\alpha,3}\cdot\boldsymbol{g}_3+\boldsymbol{g}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_{3,3}=0$，可分别得到

$$\Gamma_{3\alpha3}=\Gamma_{\alpha33}=0$$

及

$$\Gamma_{333}=0$$

$$\Gamma_{33\alpha}=0 \qquad (6-79)$$

从上面各式看出，凡下标中包含两个或两个以上的3时，则符号Γ_{ijk}为零。

由式（6—72）可推得

$$g^{\alpha 3}=0, \quad g^{33}=1 \tag{6—80}$$

于是，式（5—8）给出

$$\Gamma^{3}_{3\alpha}=\Gamma_{3\alpha\beta}g^{\beta 3}+\Gamma_{3\alpha 3}g^{33}=\Gamma_{3\alpha 3}=0 \tag{6—81}$$

类似地有

$$\Gamma^{3}_{\alpha 3}=\Gamma^{\alpha}_{33}=\Gamma^{3}_{33}=0 \tag{6—82}$$

5. 曲面的第二基本形式

基向量$\boldsymbol{g}_3$是曲面的单位法向量，它的方向与坐标x^α有关，它的导数是位于曲面的切面上的向量，记为

$$\boldsymbol{g}_{3,\alpha}=-b_{\alpha\beta}\boldsymbol{g}^{\beta} \tag{6—83}$$

从而

$$d\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{g}_{3,\alpha}dx^\alpha=-b_{\alpha\beta}dx^\alpha\boldsymbol{g}^\beta \tag{6—84}$$

线元向量

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_\gamma dx^\gamma \tag{6—85}$$

于是

$$\begin{aligned}-d\boldsymbol{g}_3\cdot d\boldsymbol{s}&=b_{\alpha\beta}dx^\alpha\boldsymbol{g}^\beta\cdot\boldsymbol{g}_\gamma dx^\gamma\\&=b_{\alpha\beta}\delta^\beta_\gamma dx^\alpha dx^\gamma\\&=b_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta\end{aligned} \tag{6—86}$$

在微分几何里，把该方程最后等式的右边称为第二基本形式，它的系数b_{11}、$b_{12}=b_{21}$、b_{22}常用L、M、N表示，关于$b_{\alpha\beta}$的对称性稍后即可给出证明。由微分几何知道，第二基本形式描述了曲面的弯曲程度。

下面导出$b_{\alpha\beta}$和克里斯托夫符号的关系。

将式$\boldsymbol{g}_\alpha\cdot\boldsymbol{g}_3=0$对$x^\beta$求导，得

$$\boldsymbol{g}_{\alpha,\beta}\cdot\boldsymbol{g}_3+\boldsymbol{g}_{3,\beta}\cdot\boldsymbol{g}_\alpha=0 \tag{f}$$

由式（6—83）有

$$\boldsymbol{g}_{3,\beta}\cdot\boldsymbol{g}_\alpha=-b_{\beta\gamma}\boldsymbol{g}^\gamma\cdot\boldsymbol{g}_\alpha=-b_{\beta\gamma}\delta^\gamma_\alpha=-b_{\beta\alpha} \tag{6—87}$$

由该式与式（f）得

$$\boldsymbol{g}_{\alpha,\beta}\cdot\boldsymbol{g}_3=b_{\beta\alpha} \qquad (6-88)$$

基向量的导数由式（5—4）可以写为

$$\boldsymbol{g}_{\alpha,\beta}=\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{g}^{\gamma}+\Gamma_{\alpha\beta3}\boldsymbol{g}^{3} \qquad (6-89)$$

两边乘$\boldsymbol{g}_3$，得

$$b_{\beta\alpha}=\Gamma_{\alpha\beta3}$$

因为克里斯托夫符号$\Gamma_{\alpha\beta3}$关于α、β对称，所以$b_{\alpha\beta}$也关于α、β对称。由上式和式（6—78）有

$$b_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta3}=\Gamma_{\beta\alpha3}=-\Gamma_{3\beta\alpha}=-\Gamma_{\beta3\alpha}=-\Gamma_{3\alpha\beta}=-\Gamma_{\alpha3\beta} \qquad (6-90)$$

而

$$b^{\alpha}_{\beta}=-\Gamma_{3\beta\gamma}g^{\alpha\gamma}=-\Gamma^{\alpha}_{3\beta}=-\Gamma^{\alpha}_{\beta3} \qquad (6-91)$$

6. 曲面的高斯（Gauss）方程和柯达齐（Codazzi）方程

假设曲面的r具有三阶连续导数。由式（2—46），有

$$\boldsymbol{g}_{\alpha,\beta\gamma}=\boldsymbol{r}_{,\alpha\beta\gamma}=\boldsymbol{r}_{,\alpha\gamma\beta}=\boldsymbol{g}_{\alpha,\gamma\beta} \qquad (6-92)$$

式（6—99）也可以写为

$$\boldsymbol{g}_{\alpha,\beta}=\Gamma_{\alpha\beta\delta}\boldsymbol{g}^{\delta}+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{g}^{3} \qquad (6-89')$$

或

$$\boldsymbol{g}_{\alpha,\beta}=\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_{\delta}+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_{3} \qquad (6-89'')$$

由最后一式对x^{μ}求导数，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_{\alpha,\beta\gamma}&=\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{g}_{\delta}+\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_{\delta,\gamma}+b_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{g}_{3}+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_{3,\gamma}\\&=\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{g}_{\delta}+\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\delta\gamma}\boldsymbol{g}_{\mu}+\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma}\boldsymbol{g}_{3}+b_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{g}_{3}\\&\quad+b_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{3\gamma}\boldsymbol{g}_{\delta}\\&=\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{g}_{\delta}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\mu\gamma}\boldsymbol{g}_{\delta}-b_{\alpha\beta}b_{\gamma\mu}g^{\mu\delta}\boldsymbol{g}_{\delta}+\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma}\boldsymbol{g}_{3}\\&\quad+b_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{g}_{3}\end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_{\alpha,\gamma\beta}&=\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma,\beta}\boldsymbol{g}_{\delta}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}_{\mu\beta}\boldsymbol{g}_{\delta}-b_{\alpha\gamma}b_{\beta\mu}g^{\mu\delta}\boldsymbol{g}_{\delta}+\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta}\boldsymbol{g}_{3}\\&\quad+b_{\alpha\gamma,\beta}\boldsymbol{g}_{3}\end{aligned}$$

将上二式代入式（6—92）后，对比$\boldsymbol{g}_1$、$\boldsymbol{g}_2$和$\boldsymbol{g}_3$的系数，得到如下两个方程式：

$$\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma,\beta}-\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}_{\mu\beta}-\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\mu\gamma}$$

$$=g^{\mu\delta}(b_{\alpha\gamma}b_{\beta\mu}-b_{\alpha\beta}b_{\gamma\mu}) \qquad (6-93)$$

$$b_{\alpha\beta,\gamma}-\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta}=b_{\alpha\gamma,\beta}-\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma} \qquad (6-94)$$

由式（5—84）可知，式（6—93）左边是二维空间的黎曼-克里斯托夫张量$R_{\dot\gamma\dot\beta\dot\alpha}{}^{\delta}$，于是有

$$R_{\dot\gamma\dot\beta\dot\alpha}{}^{\delta}=g^{\mu\delta}(b_{\alpha\gamma}b_{\beta\mu}-b_{\alpha\beta}b_{\gamma\mu}) \qquad (6-95)$$

或

$$R_{\gamma\beta\alpha\delta}=b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}-b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} \qquad (6-95')$$

式（6—95）或（6—95′）称为高斯方程。式（6—94）称为柯达齐方程。

根据式（5—99），二维黎曼空间的黎曼-克里斯托夫张量独立分量的个数只有一个。由式（6—95′）得到

$$R_{1212}=-R_{2112}=-R_{1221}=R_{2121} \qquad (6-96)$$

所有其它分量都为零。具体可将R_{1212}表为

$$R_{1212}=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21} \qquad (6-97)$$

并且定义

$$K=\frac{R_{1212}}{g} \qquad (6-98)$$

为曲面的高斯曲率。显然，它还可以表为

$$K=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}} \qquad (6-98')$$

或

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2} \qquad (6-98'')$$

这就是曲面论里常用的表达式。

另外，我们定义

$$H=\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \qquad (6-99)$$

为曲面的平均曲率。

由式（3—30），有

$$[g^{ij}]=\begin{bmatrix} \dfrac{g_{22}}{g} & -\dfrac{g_{21}}{g} \\ -\dfrac{g_{12}}{g} & \dfrac{g_{11}}{g} \end{bmatrix} \qquad (6-100)$$

代入式（6—99），得

$$H=\frac{1}{2g}\left(b_{11}g_{22}-b_{12}g_{21}-b_{21}g_{12}+b_{22}g_{11}\right) \qquad (6—101)$$

或

$$H=\frac{GL-2FM+EN}{2(EG-F^2)} \qquad (6—101')$$

这也是曲面论里常见的表达式。

由式（6—99）看出，H是一个不变量，同样也可以证明K也是一个不变量。实际上

$$g^{\gamma\delta}g^{\beta\alpha}R_{\gamma\beta\alpha\delta}=2R_{1212}\{(g^{12})^2-g^{11}g^{22}\}=-\frac{2R_{1212}}{g}$$
$$=-2K$$

由式（6—95）或（6—95′）表示的高斯方程是张量方程。而由式（6—94）表示的柯达齐方程是普通方程，我们也可以把它表示为张量形式。为此，由式（5—39）并用$\|_\alpha$代替$|_\alpha$表示二维协变导数，则有

$$b_{\alpha\beta}\|_\gamma=b_{\alpha\beta,\gamma}-b_{\delta\beta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}-b_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma}$$

$$b_{\alpha\gamma}\|_\beta=b_{\alpha\gamma,\beta}-b_{\delta\gamma}\Gamma^\delta_{\alpha\beta}-b_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\gamma\beta}$$

注意到$\Gamma^\delta_{\beta\gamma}=\Gamma^\delta_{\gamma\beta}$，由上二式可将式（6—94）写为

$$b_{\alpha\beta}\|_\gamma=b_{\alpha\gamma}\|_\beta \qquad (6—94')$$

这就是用张量方程表示的柯达齐方程。

7. 曲面上的协变导数

协变导数的概念已经在第五章详细的讲述了，这里只是在二维曲面明确的表示一下。

注意到式（6—81）、（6—82），可以把式（5—22）、（5—24）重新写为

$$v^\alpha|_\beta=v^\alpha_{,\beta}+v^\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}+v^3\Gamma^\alpha_{\beta3}$$
$$v^\alpha|_3=v^\alpha_{,3}+v^\gamma\Gamma^\alpha_{\gamma3} \qquad (6—102)$$
$$v^3|_\beta=v^3_{,\beta}+v^\gamma\Gamma^3_{\beta\gamma}$$

及

$$
\begin{aligned}
v_\alpha|_\beta &= v_{\alpha,\beta} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - v_3 \Gamma^3_{\alpha\beta} \\
v_\alpha|_3 &= v_{\alpha,3} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha 3} \\
v_3|_\beta &= v_{3,\beta} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{3\beta}
\end{aligned}
\quad (6-103)
$$

利用式（6—90）和（6—91），上面两式中的第一式可以分别表为

$$
\begin{aligned}
v^\alpha|_\beta &= v^\alpha\|_\beta - v^3 b^\alpha_\beta \\
v^\alpha\|_\beta &= v^\alpha_{,\beta} + v^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}
\end{aligned}
\quad (6-104)
$$

及

$$
\begin{aligned}
v_\alpha|_\beta &= v_\alpha\|_\beta - v_3 b_{\alpha\beta} \\
v_\alpha\|_\beta &= v_{\alpha,\beta} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\quad (6-105)
$$

如果$v^3=v_3=0$，则三维协变导数与二维协变导数的表示可不加区别。

一个曲面上的三维向量$\boldsymbol{v}$（是x^α的函数），可以把它分解为切面上的和法向方向的向量，即

$$
\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i = v^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha + v^3 \boldsymbol{g}_3 \quad (6-106)
$$

或

$$
\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{g}^i = v_\alpha \boldsymbol{g}^\alpha + v_3 \boldsymbol{g}^3 \quad (6-107)
$$

利用式（6—102）～（6—105）各式，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{,\beta} &= (v^\alpha\|_\beta - v^3 b^\alpha_\beta)\boldsymbol{g}_\alpha + v^3|_\beta \boldsymbol{g}_3 \\
&= (v^\alpha_{,\beta} + v^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - v^3 b^\alpha_\beta)\boldsymbol{g}_\alpha \\
&\quad + (v^3_{,\beta} + v^\gamma b_{\gamma\beta})\boldsymbol{g}_3
\end{aligned}
\quad (6-108)
$$

或

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{,\beta} &= (v_\alpha\|_\beta - v^3_3 b_{\alpha\beta})\boldsymbol{g}^\alpha + v_3|_\beta \boldsymbol{g}^3 \\
&= (v_{\alpha,\beta} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - v_3 b_{\alpha\beta})\boldsymbol{g}^\alpha \\
&\quad + (v_{3,\beta} + v_\gamma b^\gamma_\beta)\boldsymbol{g}^3
\end{aligned}
\quad (6-109)
$$

及

$$
\boldsymbol{v}_{,3} = v^\alpha|_3 \boldsymbol{g}_\alpha + v^3|_3 \boldsymbol{g}_3 = (v^\alpha|_3 - v^\gamma b^\alpha_\gamma)\boldsymbol{g}_\alpha + v^3_{,3}\boldsymbol{g}_3 \quad (6-110)
$$

或

$$\boldsymbol{v}_{,3}=v_{\alpha}|_{3}\boldsymbol{g}^{\alpha}+v_{3}|_{3}\boldsymbol{g}^{3}=(v_{\alpha,3}+v_{\gamma}b_{\alpha}^{\gamma})\boldsymbol{g}^{\alpha}+v_{3,3}\boldsymbol{g}^{3} \tag{6-111}$$

如果v是曲面上的向量（在切面内），则可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{,\beta}&=v^{\alpha}|_{\beta}\boldsymbol{g}_{\alpha}+v^{\gamma}b_{\gamma\beta}\boldsymbol{g}_{3}\\&=v_{\alpha}|_{\beta}\boldsymbol{g}^{\alpha}+v_{\gamma}b_{\beta}^{\gamma}\boldsymbol{g}^{3}\end{aligned} \tag{6-112}$$

类似地可以建立二阶张量协变导数公式，例如

$$A^{ij}|_{\gamma}=A^{ij}{}_{,\gamma}+A^{\delta j}\Gamma_{\gamma\delta}^{i}+A^{3j}\Gamma_{\gamma3}^{i}+A^{i\delta}\Gamma_{\gamma\delta}^{j}+A^{i3}\Gamma_{\gamma3}^{j} \tag{6-113}$$

如果是曲面上的张量，$A^{\alpha3}=A^{3\beta}=A^{33}=0$，则有

$$\begin{aligned}&A^{\alpha\beta}|_{\gamma}\equiv A^{\alpha\beta}\|_{\gamma}=A^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}+A^{\delta\beta}\Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha}+A^{\alpha\delta}\Gamma_{\gamma\delta}^{\beta}\\&A^{\alpha3}|_{\gamma}=A^{\alpha3}{}_{,\gamma}+A^{\delta3}\Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha}+A^{\alpha\delta}\Gamma_{\gamma\delta}^{3}=A^{\alpha\delta}b_{\gamma\delta}\end{aligned} \tag{6-114}$$

$$\begin{aligned}A^{3\beta}|_{\gamma}&=A^{\delta\beta}b_{\gamma\delta}\\A^{33}|_{\gamma}&=0\end{aligned}$$

例题1　在一半径为R的圆柱面上，取曲线坐标为$x^1=\theta$，$x^2=z$。柱面在笛卡尔直角坐标系中的参数方程可以表为

$$x=R\cos\theta,\quad y=R\sin\theta,\quad z=z \tag{a'}$$

试确定$g_{\alpha\beta}$，$b_{\alpha\beta}$，K，H（图6—4）。

圆柱面方程可用向量表示为

$$\boldsymbol{r}=R\cos\theta\boldsymbol{i}+R\sin\theta\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{b'}$$

于是

$$\boldsymbol{g}_{\theta}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}=-R\sin\theta\boldsymbol{i}+R\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{g}_{z}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{c'}$$

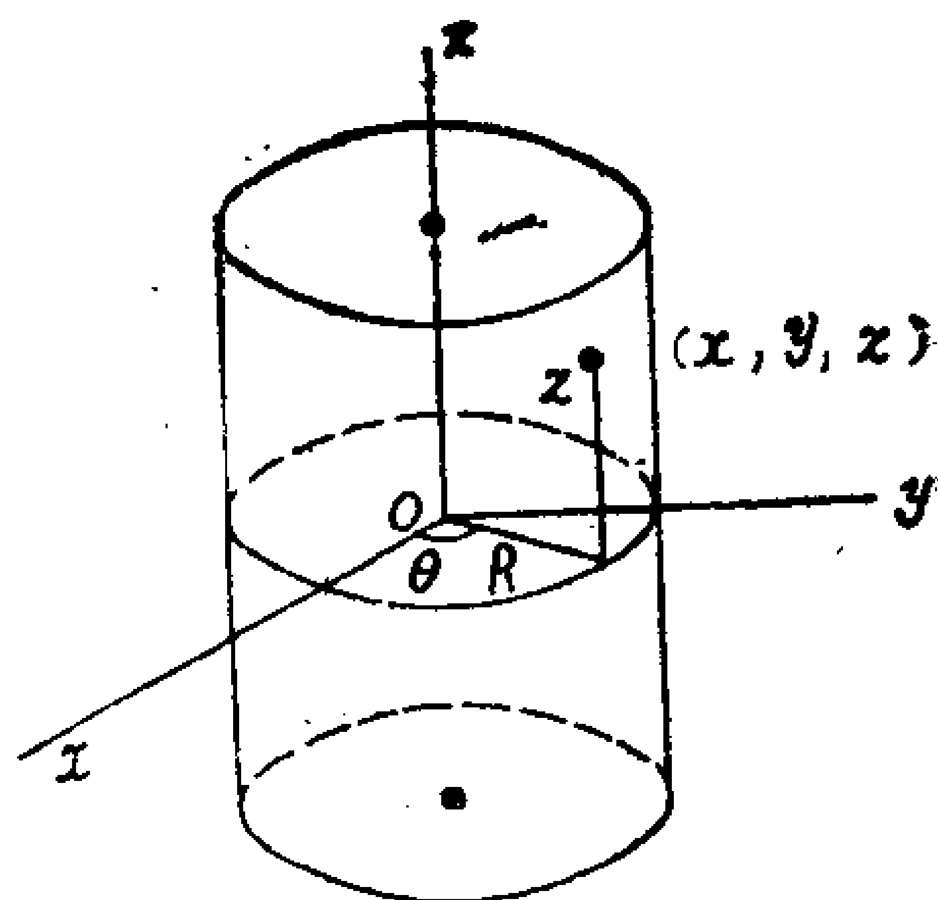


图　6—4

注意到$\boldsymbol{g}_3$是垂直于曲面的单位向量，$\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{g}^3$，以及$\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2=\epsilon_{12}\boldsymbol{g}^3$，则有

$$\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{\in_{12}}\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{\sqrt{g}}\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2$$

将式（6—73）代入，得

$$\boldsymbol{g}_3=\frac{\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}}} \qquad (d')$$

利用式（c'），在本例题中有

$$\boldsymbol{g}_3=\frac{\boldsymbol{g}_\theta\times\boldsymbol{g}_z}{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{zz}-g_{\theta z}g_{z\theta}}} \qquad (e')$$

而

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta}&=\boldsymbol{g}_\theta\cdot\boldsymbol{g}_\theta=R^2\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta=R^2\\ g_{zz}&=\boldsymbol{g}_z\cdot\boldsymbol{g}_z=1\\ g_{\theta z}&=g_{z\theta}=0\end{aligned} \qquad (f')$$

于是

$$\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{R}\boldsymbol{g}_\theta\times\boldsymbol{g}_z=(R\sin\theta\boldsymbol{j}+R\cos\theta\boldsymbol{i})/R=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j} \qquad (g')$$

由式（c'）有

$$\begin{aligned} \frac{\partial\boldsymbol{g}_\theta}{\partial\theta}&=-R\cos\theta\boldsymbol{i}-R\sin\theta\boldsymbol{j}\\ \frac{\partial\boldsymbol{g}_z}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial\boldsymbol{g}_\theta}{\partial z}&=\frac{\partial\boldsymbol{g}_z}{\partial\theta}=0\end{aligned} \qquad (h')$$

将式（g'）、（h'）代入式（6—88）得

$$\begin{aligned} b_{\theta\theta}&=-R\cos^2\theta-R\sin^2\theta=-R\\ b_{zz}&=0\\ b_{\theta z}&=b_{z\theta}=0\end{aligned} \qquad (i')$$

最后，由式（6—98′）、（6—101）得

$$K=0,\quad H=-\frac{1}{2R} \qquad (j')$$

例题 2 例题 1 的圆柱面，曲线坐标取为$x^1=y$，$x^2=z$，试重作上题。

这时，参数方程是

$$x=\sqrt{R^2-y^2},\quad y=y,\quad z=z \tag{a'}$$

柱面方程为

$$\boldsymbol{r}=\sqrt{R^2-y^2}\,\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{b'}$$

于是可求得

$$\boldsymbol{g}_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{g}_z=\boldsymbol{k} \tag{c'}$$

所以

$$g_{yy}=\frac{R^2}{R^2-y^2},\quad g_{zz}=1,\quad g_{yz}=g_{zy}=0 \tag{d'}$$

及

$$\sqrt{g}=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} \tag{e'}$$

由式（c'）、（e'）求得

$$\boldsymbol{g}_3=\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R}\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R}\,\boldsymbol{i}+\frac{y}{R}\boldsymbol{j} \tag{f'}$$

于是，由式（6—88）可求得

$$b_{yy}=-\frac{R}{R^2-y^2},\quad b_{zz}=0,\quad b_{yz}=b_{zy}=0 \tag{g'}$$

最后，由式（6—98′）、（6—101）求得

$$K=0,\quad H=-\frac{1}{2R} \tag{h'}$$

例题 3 在球面上（半径为 R），取坐标 $x^1=\theta$，$x^2=\varphi$(图 6—5)，而参数方程为

$$x=R\cos\varphi\cos\theta,\quad y=R\cos\varphi\sin\theta,\quad z=R\sin\varphi \tag{a'}$$

试求 $g_{\alpha\beta}$，$b_{\alpha\beta}$，K，H。

由式（a'），球面方程写为

$$\boldsymbol{r}=R\cos\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{i}+R\cos\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{j}+R\sin\varphi\,\boldsymbol{k} \tag{b'}$$

于是求得

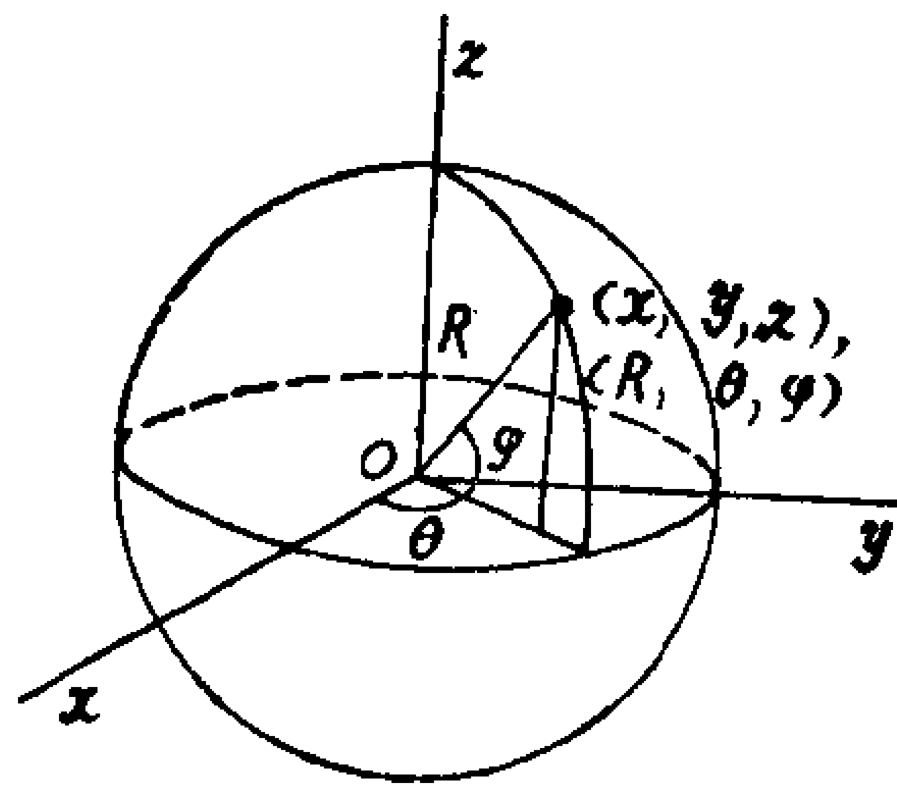


图 6—5

$$\boldsymbol{g}_\theta = -R\cos\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{i} + R\cos\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{g}_\varphi = -R\sin\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{i} - R\sin\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{j} + R\cos\varphi\,\boldsymbol{k} \qquad (c')$$

所以

$$g_{\theta\theta} = R^2\cos^2\varphi,\quad g_{\varphi\varphi} = R^2,\quad g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0 \qquad (d')$$

$$g = R^4\cos^2\varphi \qquad (e')$$

由式（c'）、（e'）求得

$$\boldsymbol{g}_3 = \frac{1}{R^2\cos\varphi}\boldsymbol{g}_\theta \times \boldsymbol{g}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{j} + \sin\varphi\,\boldsymbol{k} \qquad (f')$$

而

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_\theta}{\partial\theta} = -R\cos\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{i} - R\cos\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_\varphi}{\partial\varphi} = -R\cos\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{j} - R\cos\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{j} - R\sin\varphi\,\boldsymbol{k} \qquad (g')$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_\theta}{\partial\varphi} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_\varphi}{\partial\theta} = R\sin\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{i} - R\sin\varphi\cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

于是，由式（6—88）求得

$$b_{\theta\theta} = -R\cos^2\varphi,\quad b_{\varphi\varphi} = -R,\quad b_{\theta\varphi} = b_{\varphi\theta} = 0 \qquad (h')$$

最后由式（6—98′）、（6—101）求得

$$K = \frac{1}{R^2},\quad H = -\frac{1}{R} \qquad (i')$$

附录　向量计算的基本知识

第一节　基　本　概　念

1．标量与向量

一个完全由数量就能确定的物理量或几何量称为标量。

如果标量与坐标系的选择无关，则称为绝对标量（或不变量）。例如，物体的质量、体积、密度、温度，力所做的功，能量，两点之间的距离和时间等等。我们主要研究绝对标量，本书正文中除特别指明者外均为绝对标量，今后，为简单起见将“绝对”二字省掉。

也有这样的标量，它的大小与坐标系的选择有关，称为伪标量。例如，在第三章第一节所遇到的度量张量行列式 g。

标量的运算遵守初等代数的运算规则。

必须用一个数量（大小）和空间的一定方向才能完全确定的物理量或几何量称为向量（或矢量）。例如，位移、速度、加速度、力和力矩等等。

看来，向量的应用相当广泛，因此有必要研究它的运算规则，主要是向量代数运算和解析运算。这就是后面我们将要研究的内容。一般说来，向量运算与标量运算是不相同的。它的基本方法是在1880—1882年间由吉布斯（Gibbs）发展起来的。

2．向量的表示方法

根据向量的定义，在采用图解法时，用一个带箭头的线段表示是很直观的。例如用 OP 表示一个向量，O 表示向量的作用点，箭头指向表示向量的方向，OP 的长度表示向量的大小（图附—1）。

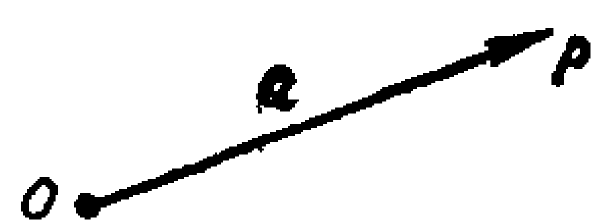


图　附—1

在分析运算上常采用两种表示方法：带箭头的字母，如 $\vec{a}$，

$\vec{b}$及粗体字母，如$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，本书采用后者。向量的大小，也称为向量的模，表示为$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$或a，b等。如果用两点——始点和终点表示向量，如前面的OP也常记为$\overrightarrow{OP}$，模记为$|\overrightarrow{OP}|$或OP。用两个字母表示的向量不用粗体字，而用箭头。

一个向量如作用点固定，则称为固定向量；如作用点不固定，可沿某直线滑动，则称为滑动向量；如无确定的作用点，可以在保持大小和方向的条件下自由移动，则称为自由向量。

至于在具体问题中应该采用什么向量，则取决于问题的物理性质或几何性质。例如，质点运动的速度和加速度、在弹性体上作用于一点的力都是固定向量，作用于刚体上的力和刚体的瞬时角速度都是滑动向量，而作用于刚体上的力偶矩则是自由向量。

不管是那种向量，我们都采用前述的表示方法，因为这样方便而不会引起混乱。

3. 向量的研究方法

本章所讨论的向量代数运算是对于自由向量的。但是，只要有明确的物理含义，也可以用于其它的向量，例如，可以对作用于弹性体固定点上的力向量施行合成或分解的代数运算，只是不能随意的移动它；再如，作用于刚体上的力是滑动向量，可以像理论力学那样把它移出作用线再加上一个力偶矩向量，然后把它们与其它向量计算。显然，把力向量与力偶矩向量进行运算是毫无意义的。

所以，后面的分析不再区分是何种向量。

向量代数的研究方法可以分为两种：一种是不用坐标系来定义运算；另一种是在坐标系中进行运算。前一种方法的优点是，它不依赖坐标系，直观性强，易于采用图解法。不依赖坐标系这一点，符合物理问题的基本假设，即描写物理运动或现象的方程和物理量不应当依赖于所选取的坐标系，因此，它与物理本质显得非常和谐。后一种方法的优点是具体计算时比较方便，经推广和发展后可以得到一种新的方法，即张量方法。张量代数的方法能够做到：在特定的坐标系中建立物理方程或物理量，而得到的

结果可以用在各种坐标系中。当然，这种方法较为抽象和形式化。这两种方法是一致的，在应用中都会遇到，因此将都给以介绍。

4．零向量·单位向量·相等向量·相反向量

大小为零的向量称为零向量，记为$\mathbf{O}$，或简写为0。

大小等于1的向量称为单位向量。如$\boldsymbol{a}$是单位向量，则$|\boldsymbol{a}|=1$。如$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，则$\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$是单位向量。

如果两个（或多个）向量大小相等，彼此平行而且指向相同，则称这两个（或多个）向量彼此相等。如图附一2的向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$是相等的向量，可记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。以后对相等的向量可以不加区分，用同一的符号表示它们。

如果两向量大小相等，相互平行，而指向相反，则相互称为相反向量。例如图附一2中的$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$，记为$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{c}$。显然$\boldsymbol{a}$与$-\boldsymbol{a}$是相反向量。

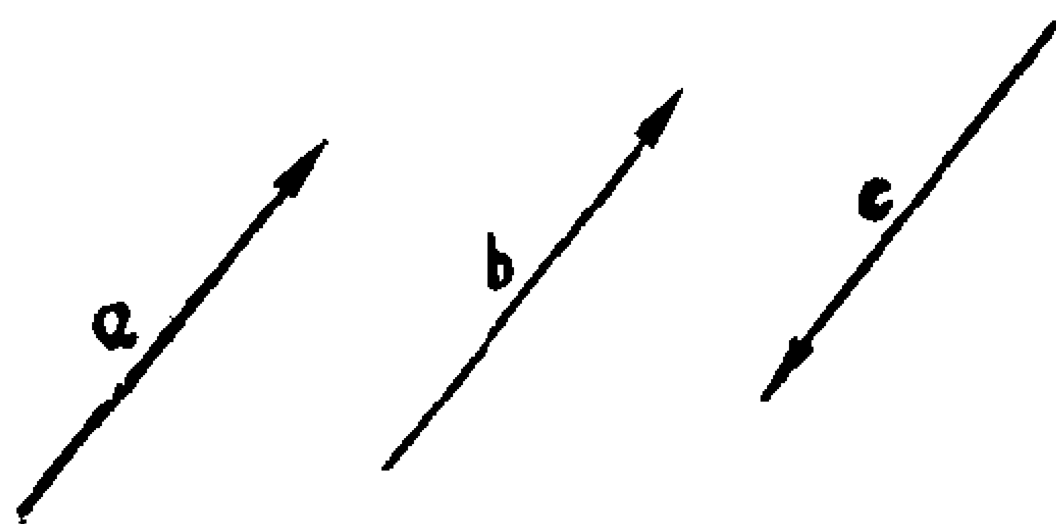


图 附一2

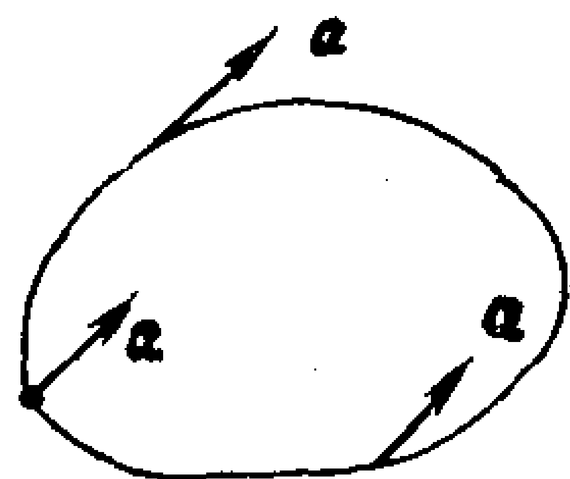


图 附一3

5．向量的平行移动

根据相等向量的定义可以推出，向量可以在空间*) 平行移动到任意其它点。如把向量沿某闭合曲线平行移动一周回到原点，则与原向量重合。如图附一3。也就是说在欧几里德空间把向量从一点平行移动到另一点，保持其大小和方向，与所走过的路径无关。

*）指通常的欧几里德空间。

第二节 向 量 代 数

一、不用坐标系的向量代数

1. 向量加法

向量加法运算的结果称为和（或几何和）。向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和仍是向量，亦称合成向量，记为$\boldsymbol{c}$，它的定义如下：将$\boldsymbol{b}$的起点与$\boldsymbol{a}$的终点相接，则以$\boldsymbol{a}$的起点为起点，以$\boldsymbol{b}$的终点为终点的向量即为向量$\boldsymbol{c}$。显然，如把$\boldsymbol{a}$的起点与$\boldsymbol{b}$的终点连接，也可以得到同一个向量$\boldsymbol{c}$，亦即与次序无关（图附一4）。因此可以记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{1}$$

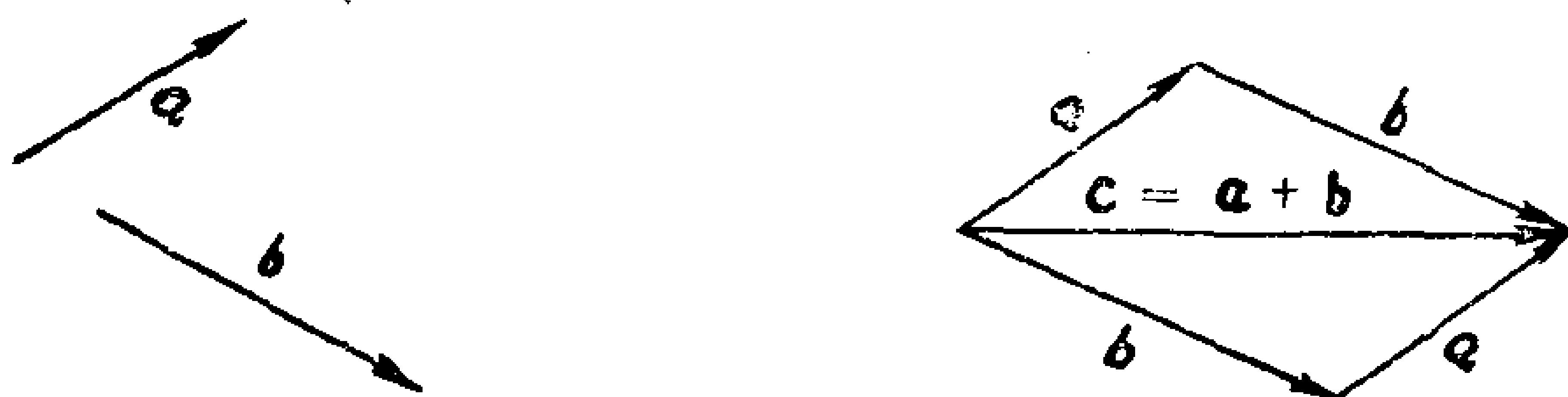
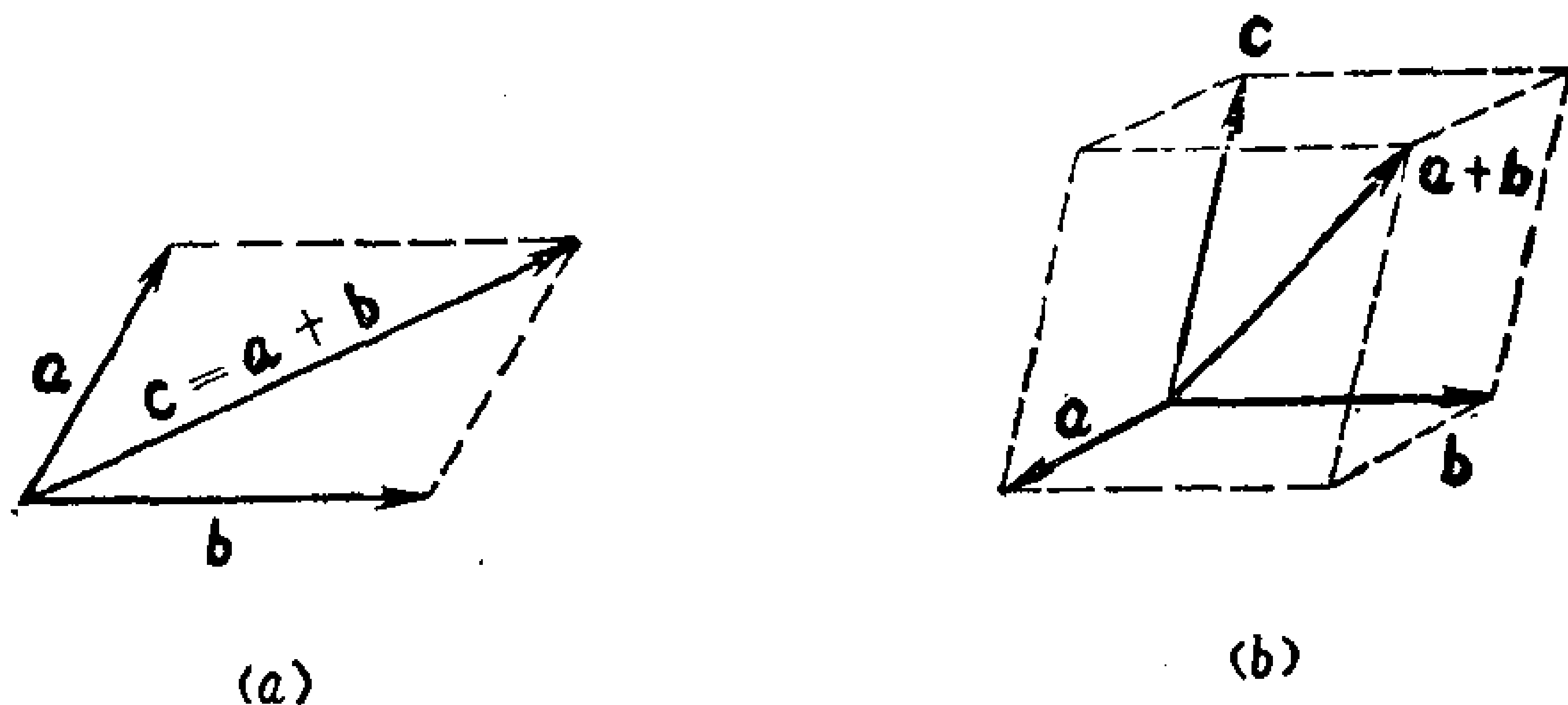


图 附一4

上面求两个向量和的方法称为向量加法的三角形法则。

我们也可以采用另一种方法求和。即将$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$取共同始点，并以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为边作平行四边形，通过两向量起点的对角线就是合成向量$\boldsymbol{c}$，如图附一5（a）。这个方法称为向量加法的平行四边形法则。根据这一法则，不在同一个平面上的三个向量和为平行六面体的对角线，如图附一5（b）。



(a) (b)

图 附一5

根据几何关系很容易证明，“三角形法则”与“平行四边形法则”是等价的。

上面两个向量加法的法则，可以推广到多个向量的加法。例如，求$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的向量和，可将这些向量诸个首尾相接，由封闭线所形成的向量$\boldsymbol{d}$（图附－6，a）即为向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的和，记为

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \tag{2}$$

上述方法称为向量加法的多边形法则。

根据多边形的几何性质得出：向量和的模小于或等于各向量模的算术和。即

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}| \tag{3}$$

如果求和的各向量按向量加法的多边形法则能构成一个封闭多边形，则合成向量为零向量，如图附－6（b）。

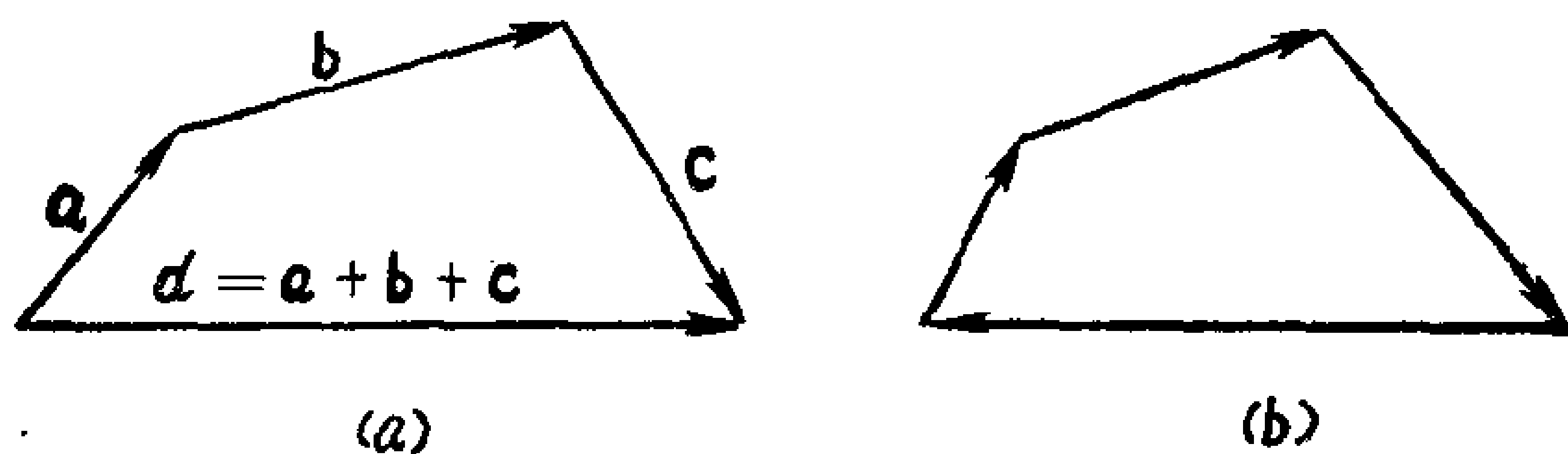


图 附－6

向量加法法则用刚体力学的力向量可以给出物理上的解释。例如，刚体受两个方向力的作用，平行四边形法则给出合力的大小和作用方向。作用于质点上的力向量多边形封闭表示作用于该质点上的诸力的合力为零，物体处于静止或匀速直线运动状态。

向量加法服从如下的运算定律：

（1） $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律） （4）

（2） $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

$=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（结合律） （5）

加法运算的交换律和结合律很容易根据定义用图解法得到证实。

2． 向量减法

向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差定义一个新的向量，用$\boldsymbol{c}$表示，它与向量$\boldsymbol{b}$（减数）的和等于向量$\boldsymbol{a}$（被减数），记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \qquad (6)$$

利用图解法，可将$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$两向量取共同始点，从向量$\boldsymbol{b}$的终点到向量$\boldsymbol{a}$的终点引一向量即为所求，如图附—7（a）。这是由于$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$，而$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，然后按加法作图的结果。

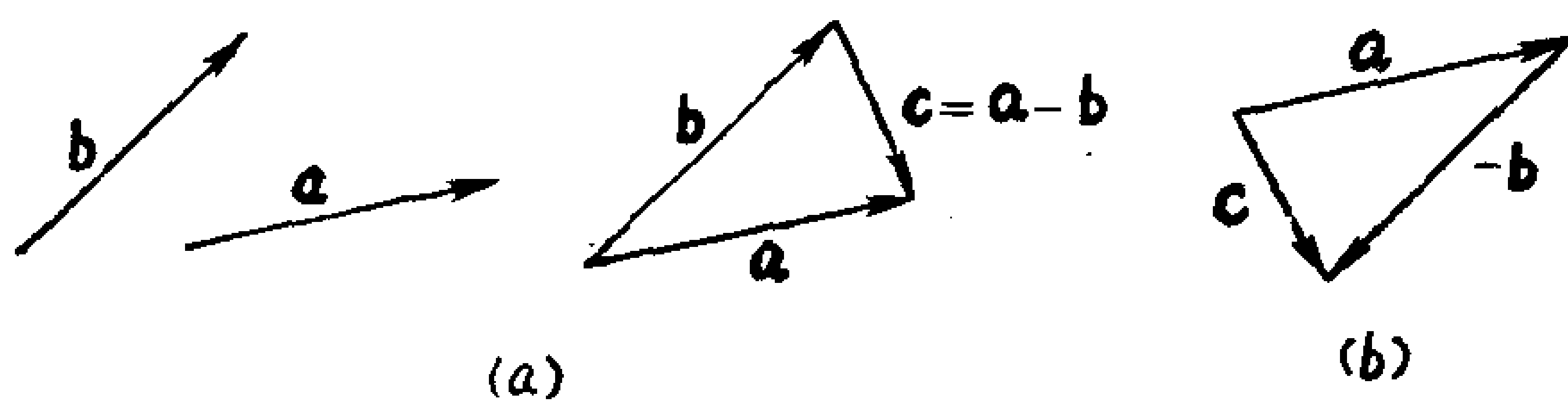


图 附—7

由直接的几何作图很容易证明：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \qquad (7)$$

即，要减去向量$\boldsymbol{b}$，可加上它的相反向量（$-\boldsymbol{b}$）。如图附—7（b）。

由此显见，向量与它的相反向量之和为零向量。即

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0 \qquad (8)$$

由上面的性质还可以得出：在向量等式中的某一项，可以在变号后从一端移到另一端。例如，若

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d} \qquad (9)$$

则
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$$

根据三角形的性质，显然有

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}| \qquad (10)$$

即向量差的模大于或等于向量模的差。

根据加法和减法的法则，在向量平行四边形中，通过两向量始点的对角线为向量和，通过两向量终点的对角线为向量差。如图附—8。

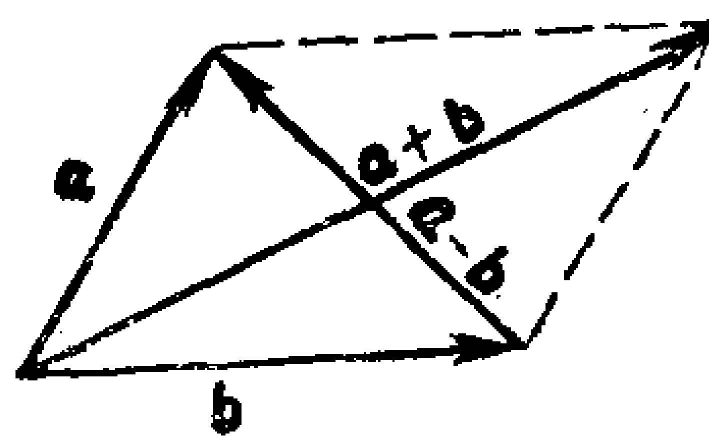


图 附—8

3. 标量与向量相乘的乘法

向量$\boldsymbol{a}$与标量m的乘积仍为一向量，记为$m\boldsymbol{a}$，新向量的指向不变（当$m>0$）或相反（$m<0$），而模为原向量模的m倍，即

$$|m\boldsymbol{a}| = |m|\ |\boldsymbol{a}| \tag{11}$$

若$m=0$，则得零向量。

根据定义，用-1乘向量则得到相反向量。

标量与向量的乘法服从如下的运算定律：

（1） $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}m$（交换律） (12)

（2） $m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a}$（结合律） (13)

（3） $(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$ (14)

（分配律）

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b} \tag{15}$$

上述定律不难由定义直接得到验证。

4． 向量的点积

向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的点积（亦称内积）是一标量，定义为此二向量的模与其夹角余弦的乘积，记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|a|\ |b|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) \tag{16}$$

式中$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角。若置$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\theta$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi) \tag{16'}$$

点积是向量代数新定义的一种运算，这与许多物理问题的要求是一致的。例如，在计算力F在与其成θ角方向的位移$\boldsymbol{S}$上所做的功（W）时，就是F与$\boldsymbol{S}$的点积运算，即

$$W=|F|\ |\boldsymbol{S}|\cos\theta \tag{17}$$

向量的点积服从如下的运算定律：

（1） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（点积交换律） (18)

（2） $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\mathbf{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律） (19)

（3） $(m\boldsymbol{a})\cdot(n\boldsymbol{b})=(mn)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ (20)

性质（1），（3）都不难由定义直接证明。性质（2）也可由图解法证明。因为由图附一9显然有

$$|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos\alpha+|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{c}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\,(|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\gamma)$$

另外，根据定义有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\ (\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\ 且\boldsymbol{a}\neq 0,\ \boldsymbol{b}\neq 0) \tag{21}$$

及

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\ (\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b},\ 且\boldsymbol{a}\neq 0,\ \boldsymbol{b}\neq 0) \tag{22}$$

显然

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=a^2 \tag{23}$$

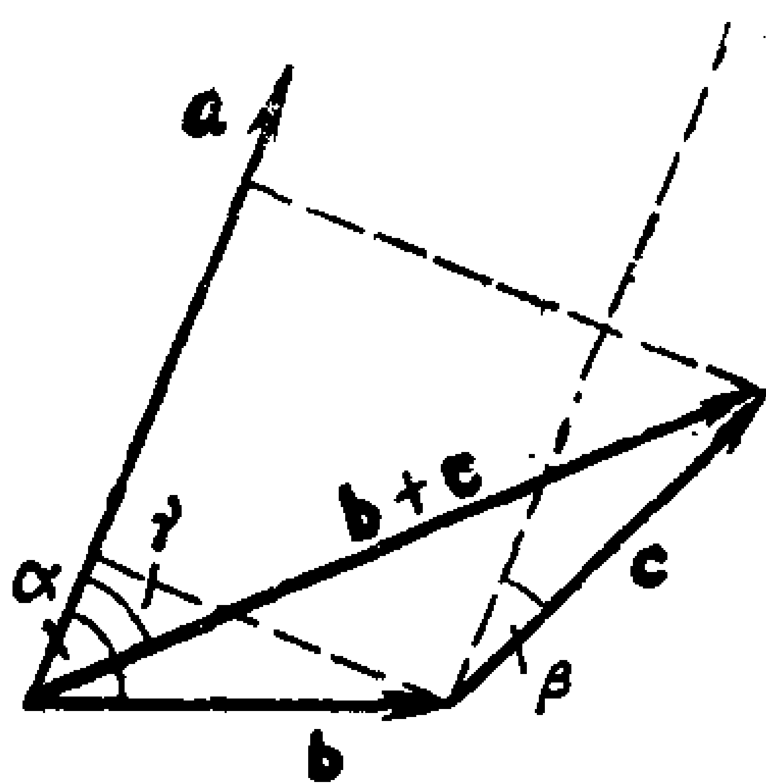


图 附—9

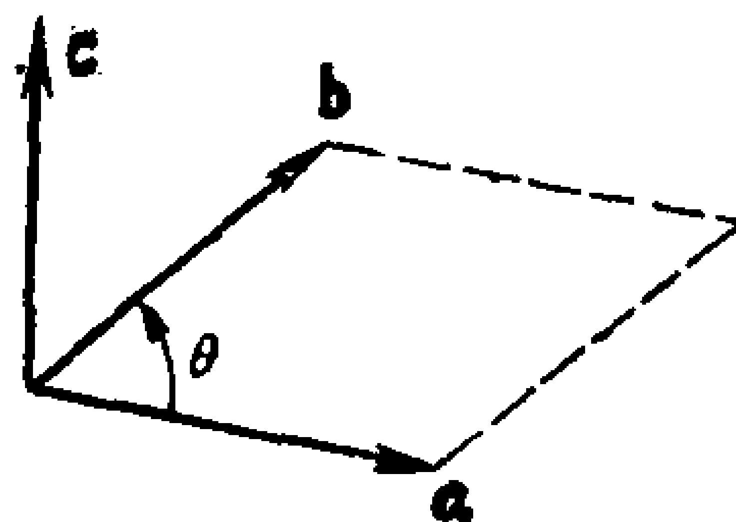


图 附—10

5. 向量的叉积

向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的叉积（亦称外积）是一向量，它是这样定义的，其模为此二向量的模与其夹角正弦的乘积，其方向垂直于 $\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所在的平面，且与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$形成右手系（图附—10）。向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的叉积记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，根据定义有

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\sin\theta \tag{24}$$

叉积也是向量代数新定义的一种运算，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的直接意义是，它的模代表由 $\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$ 所构成的平行四边形面积。实际上，现在我们可以用向量来表示面积，向量的模代表面积的大小，向量的指向代表面积的法线方向。（图附—10）。

力矩向量是叉积的又一个例子。设平面上有一点O和作用于A点的力$\boldsymbol{f}$，位置向量$\overrightarrow{OA}$用$\boldsymbol{r}$表示，力矩向量用$\boldsymbol{m}$表示，则

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f} \tag{25}$$

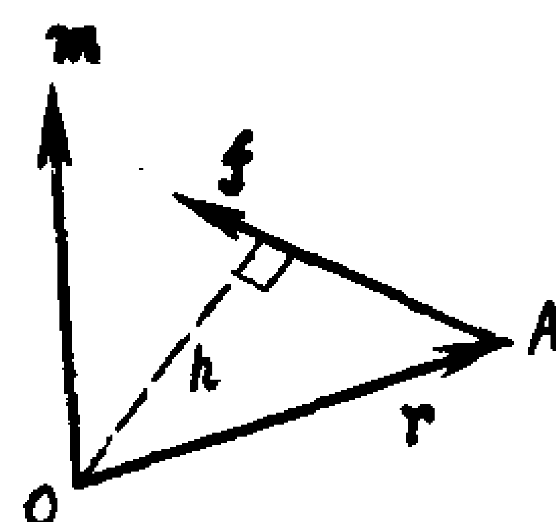


图 附—11

根据定义很容易验证上式。由图附—11，力矩的大小为

$$|\boldsymbol{m}|=|\boldsymbol{f}|\ h$$

式中h是力臂，即O至力向量$\boldsymbol{f}$方向的垂线，显然乘积$|\boldsymbol{f}|\ h$等于

$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{r}$所构成的平行四边形的面积（h是平行四边形的高），于是

$$|\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{f}|\ |\boldsymbol{r}| \sin(\boldsymbol{r}, \hat{\ } \boldsymbol{f})$$

$\boldsymbol{m}$的方向与$|\boldsymbol{f}|\,h$的转向符合。于是可得式（25）。

向量的叉积服从如下的运算定律：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$（叉积交换律不成立） (26)

（2）$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$（分配律） (27)

（3）$(m\boldsymbol{a})\times(n\boldsymbol{b})=(mn)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (28)

性质（1），（3）很容易由定义直接证明，性质（2）的证明稍许麻烦一些，我们在本节的下一部分进行。

另外，由定义还很容易证明：

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$（$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\neq 0$，$\boldsymbol{b}\neq 0$） (29)

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|$（$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\neq 0$，$\boldsymbol{b}\neq 0$） (30)

6．向量的混积

三个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的混积是一个标量，定义为$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，有时记为$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$。

首先我们证明，混积等于以组成向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为边的平行六面体的体积。

由图附—12，若平行六面体的底面积为S，则$S=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$。若$\boldsymbol{n}$是平行四边形$ABCD$的单位法向量，则$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\,\boldsymbol{n}$。令$\boldsymbol{a}$的终点在平行四边形$ABCD$之上的高度为$h$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=h$。于是，平行六面体的体积

$$\begin{aligned}V&=hS=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}(|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|)\\&=\boldsymbol{a}\cdot(|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\,\boldsymbol{n})\\&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

所以

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\pm V$ (31)

式中的正负号，视$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{n}$的夹角，锐角取正，钝角取负。

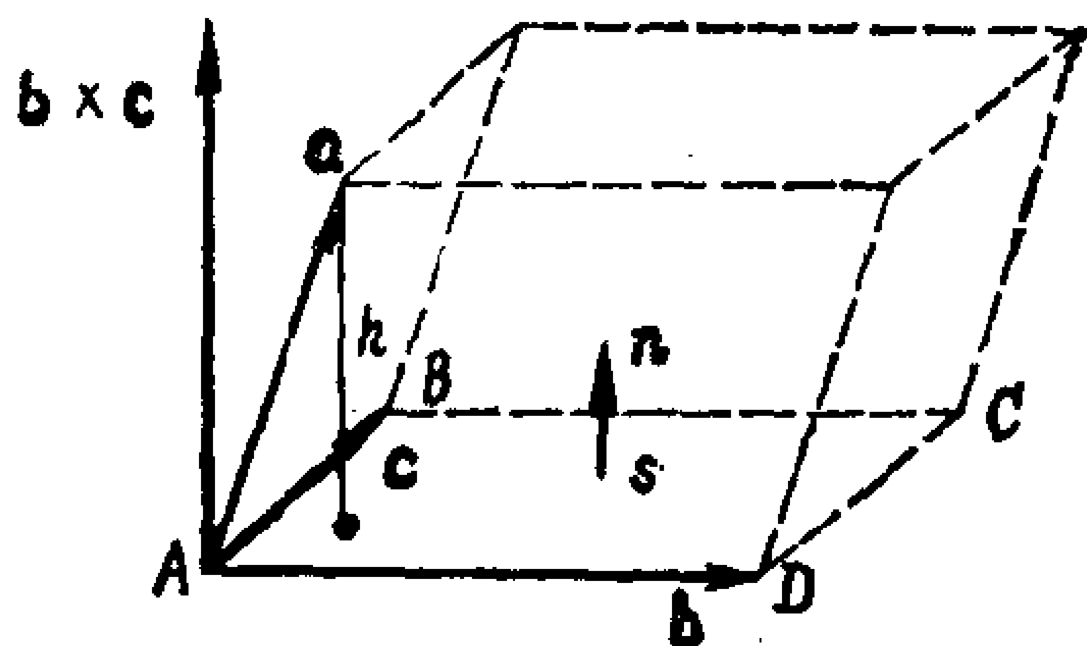


图 附—12

二、用坐标系的向量代数

这一段里，我们在笛卡尔直角坐标系里研究向量的代数运算。全部采用右手坐标系。

（一）向量的合成和分解

根据向量代数的平行四边形法则，空间任意三个不共面的向量总可以相加（合成）一个向量，结果是唯一的。反过来，也可以根据需要把一个向量进行分解。但是，分解不是唯一的。例如，图附—13中的向量$\boldsymbol{u}$，可以分解为$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，也可以分解为$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{d}$，其中的每一个还可以继续分解。

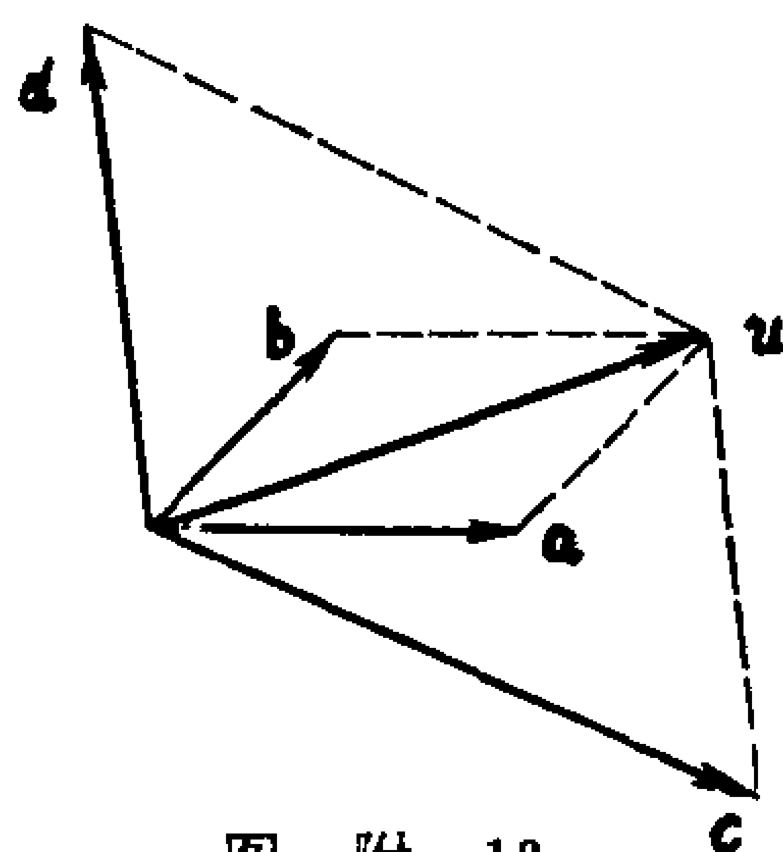


图 附—13

（二）向量的正交分解·单位基向量

若把一个向量按三个相互垂直的方向分解就称为正交分解，例如在笛卡尔直角坐标系中可将向量按坐标轴 x，y，z 方向分解。如图附—14（a）表示一个位置向量$\boldsymbol{r}$（从坐标原点到空间某坐标点的向量，亦称向径）的分解，它在每个坐标轴上的支向量都可以用单位向量与向径投影之积表示。如用$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$表示x，y，z坐标轴上的单位向量，方向与坐标轴的指向相同，$\boldsymbol{r}$在坐标轴上的投影为x，y，z，则

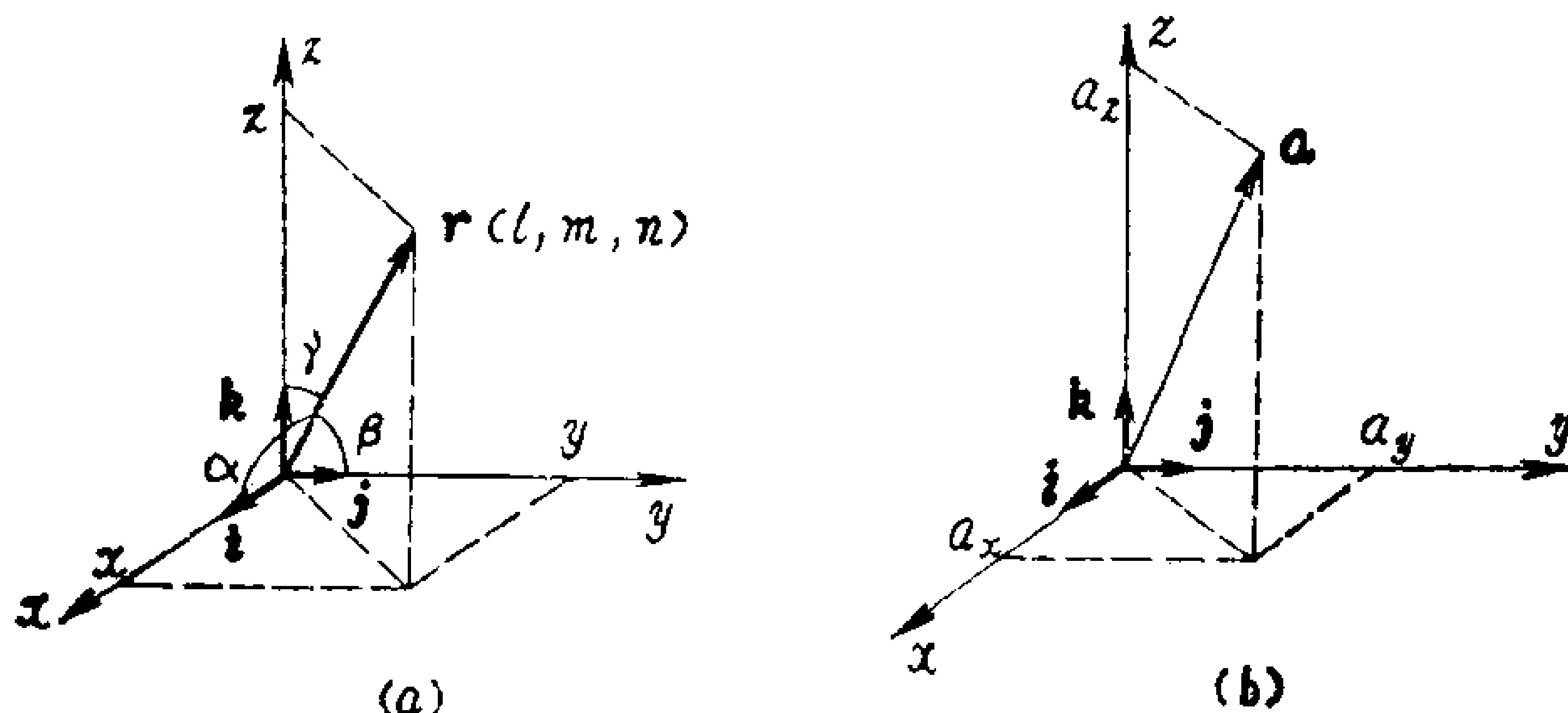


图 附—14

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{32}$$

对于任意向量$\boldsymbol{a}$，同样可以分解为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{33}$$

式中，a_x，a_y，a_z 是$\boldsymbol{a}$在x，y，z 轴上的投影。如图附—14（b）。

（三）坐标系中的向量代数

1. 加　法

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k} \tag{35}$$

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k} \tag{36}$$

所以　$c_x=a_x+b_x$，$c_y=a_y+b_y$，$c_z=a_z+b_z$　(37)

2. 减　法

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k} \tag{38}$$

所以　$d_x=a_x-b_x$，$d_y=a_y-b_y$，$d_z=a_z-b_z$　(39)

向量加法（或减法）的图解（平面情形）如图附—15。

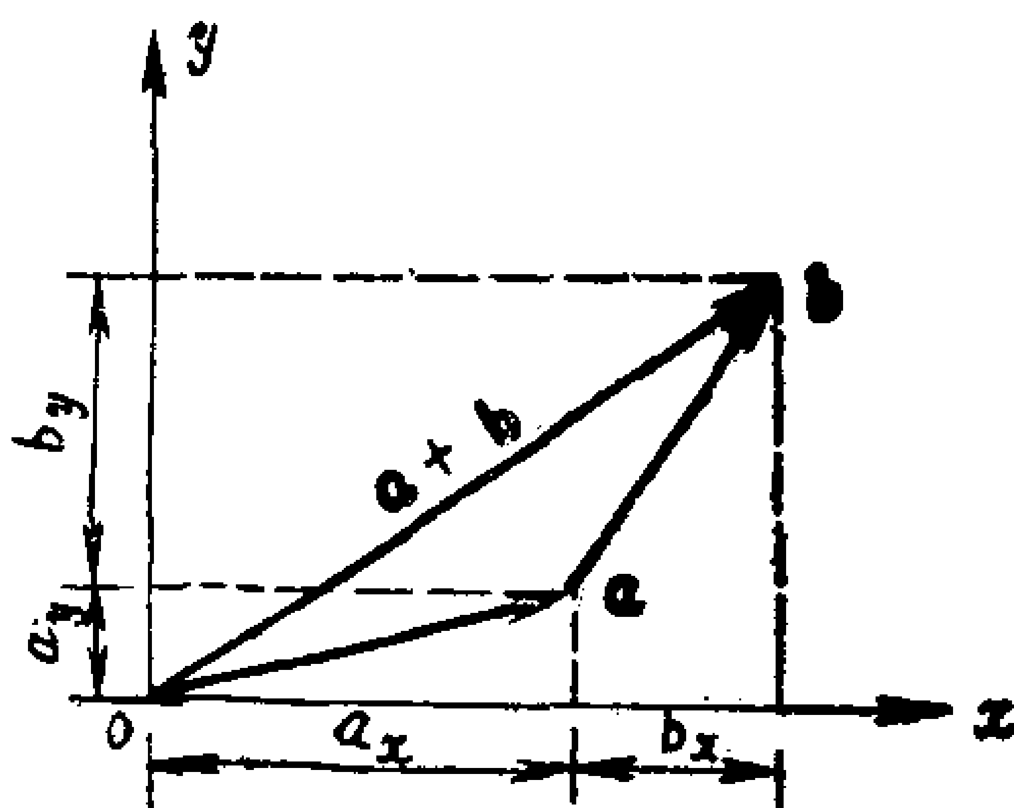


图　附—15

3. 点　积

注意到$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$是相互正交的单位向量，根据点积的定义，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0\end{aligned} \tag{40}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\ &=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned} \tag{41}$$

即两个向量的点积等于它们在坐标轴上同类投影之积的代数和。

相同两向量的点积为

$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2 \tag{42}$$

所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{43}$$

同理

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \tag{44}$$

由式（16），有

$$\cos(\boldsymbol{a}, \hat{\ } \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|a|\ |b|} \tag{45}$$

或

$$\cos(\boldsymbol{a}, \hat{\ } \boldsymbol{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \tag{45'}$$

这就是向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的关系式。

4. 叉　积

注意到$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$是右手系相互正交的单位基向量，根据叉积定义，有

$$\begin{gathered} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{j} \end{gathered} \tag{46}$$

及

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0 \tag{47}$$

于是有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \mathrm{j} + a_z \boldsymbol{k}) \times (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{48}$$

所以

$$\begin{aligned} &c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \\ &c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{aligned} \tag{49}$$

式（48）也可以写为行列式形式，为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \doteq \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{48'}$$

它的模为

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2} \tag{50}$$

若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，由式（49），有

$$a_y b_z - a_z b_y = 0,\quad a_z b_x - a_x b_z = 0,\quad a_x b_y - a_y b_x = 0$$

或

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \tag{51}$$

即两个平行的向量，对应的投影成比例。

下面证明公式（27）。首先计算等式左边：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})[(b_x+c_x)\boldsymbol{i}+(b_y+c_y)\boldsymbol{j}\\ &\qquad +(b_z+c_z)\boldsymbol{k}]\\ &=[a_y(b_z+c_z)-a_z(b_y+c_y)]\boldsymbol{i}\\ &\quad +[a_z(b_x+c_x)-a_x(b_z+c_z)]\boldsymbol{j}\\ &\quad +[a_x(b_y+c_y)-a_y(b_x+c_x)]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

等式右边

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} &= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i}+(a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j}\\ &\quad +(a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}+(a_y c_z - a_z c_y)\boldsymbol{i}\\ &\quad +(a_z c_x - a_x c_z)\boldsymbol{j}+(a_x c_y - a_y c_x)\boldsymbol{k}\\ &=[a_y(b_z+c_z)-a_z(b_y+c_y)]\boldsymbol{i}\\ &\quad +[a_z(b_x+c_x)-a_x(b_z+c_z)]\boldsymbol{j}\\ &\quad +[a_x(b_y+c_y)-a_y(b_x+c_x)]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

对比上二式右边完全相等，式（27）得证。

5. 混　　积

利用式（48），有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot[(b_y c_z - b_z c_y)\boldsymbol{i}+\\ &\qquad +(b_z c_x - b_x c_z)\boldsymbol{j}+(b_x c_y - b_y c_x)\boldsymbol{k}]\\ &= a_x(b_y c_z - b_z c_y)+a_y(b_z c_x - b_x c_z)\\ &\quad +a_z(b_x c_y - b_y c_x)\end{aligned}$$

等式右边可写为行列式形式，于是有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \tag{52}$$

由此及行列式换行（或列）性质，可以证明：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \tag{53}$$

及 $$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

由式（52），不共面三个向量的体积还可以写为

$$V=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{54}$$

如果三个向量共面，则$V=0$。

（四）向量的方向余弦

设向量$\boldsymbol{r}$与三个坐标轴的夹角为α,β,γ，由图附—14（a），显然有

$$x=|\boldsymbol{r}|\,l,\quad y=|\boldsymbol{r}|\,m,\quad z=|\boldsymbol{r}|\,n \tag{55}$$

式中 $l=\cos\alpha$，$m=\cos\beta$，$n=\cos\gamma$称为方向余弦。由

$$|\boldsymbol{r}|^2=x^2+y^2+z^2$$

并将式（55）代入，得

$$l^2+m^2+n^2=1 \tag{56}$$

对于任意向量$\boldsymbol{a}$（方向余弦为l，m，n），有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,(\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k})$$

或 $$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,(l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}) \tag{57}$$

类似地，向量$\boldsymbol{b}$（方向余弦为l'，m'，n'），有

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,(l'\boldsymbol{i}+m'\boldsymbol{j}+n'\boldsymbol{k})$$

由式（45）求得

$$\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=ll'+mm'+nn' \tag{58}$$

所以，若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则

$$ll'+mm'+nn'=1 \tag{59}$$

若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则

$$ll'+mm'+nn'=0 \tag{60}$$

（五）坐标变换

向量$\boldsymbol{a}$在坐标系$oxyz$和$ox'y'z'$中的投影，或称为分量，分

别用a_x，a_y，a_z和$a_{x'}$，$a_{y'}$，$a_{z'}$表示。二维情形如图附—16所示。

现已知新坐标系$ox'y'z'$的单位基向量在旧标系$oxyz$的方向余弦，列表如下：

	$x(\boldsymbol{i})$	$y(\boldsymbol{j})$	$z(\boldsymbol{k})$
$x'(\boldsymbol{i}')$	l_1	m_1	n_1
$y'(\boldsymbol{j}')$	l_2	m_2	n_2
$z'(\boldsymbol{k}')$	l_3	m_3	n_3

(61)

求$a_{x'}$，$a_{y'}$，$a_{z'}$与a_x，a_y，a_z的关系。

由式（57）求得，任何一个单位向量

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k} \tag{62}$$

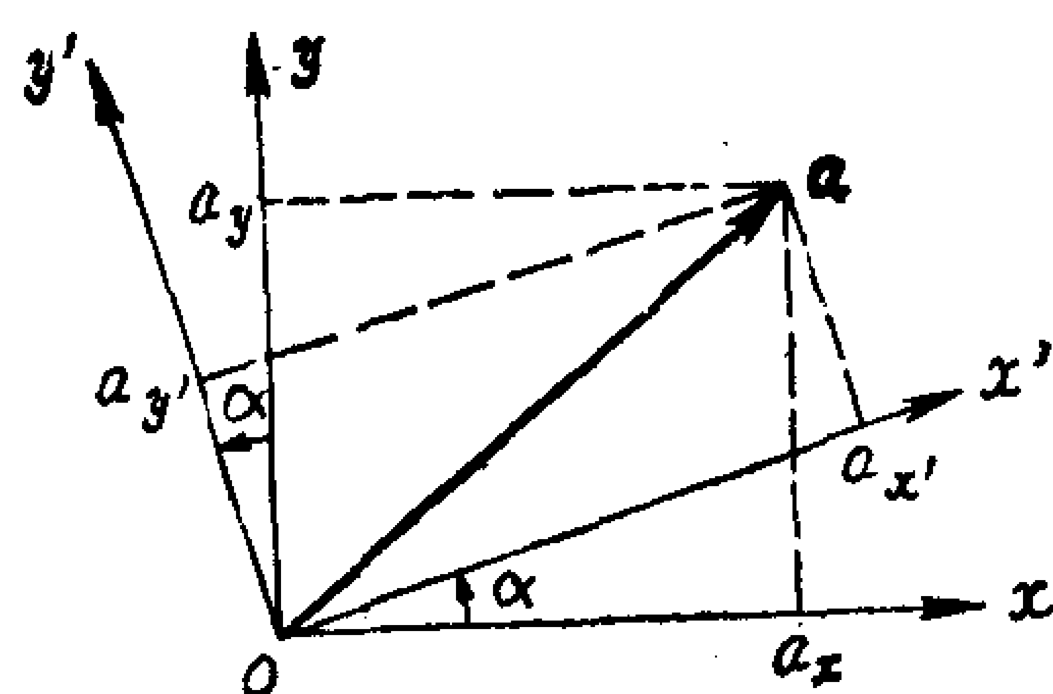


图 附—16

由此，可以把$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$在新坐标系中表为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}&=l_1\boldsymbol{i}'+l_2\boldsymbol{j}'+l_3\boldsymbol{k}'\\ \boldsymbol{j}&=m_1\boldsymbol{i}'+m_2\boldsymbol{j}'+m_3\boldsymbol{k}'\\ \boldsymbol{k}&=n_1\boldsymbol{i}'+n_2\boldsymbol{j}'+n_3\boldsymbol{k}'\end{aligned} \tag{63}$$

向量$\boldsymbol{a}$在新坐标系表为

$$\boldsymbol{a}=a_{x'}\boldsymbol{i}'+a_{y'}\boldsymbol{j}'+a_{z'}\boldsymbol{k}' \tag{64}$$

在旧坐标系表为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

将式（63）代入，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_x(l_1\boldsymbol{i}'+l_2\boldsymbol{j}'+l_3\boldsymbol{k}')+a_y(m_1\boldsymbol{i}'+m_2\boldsymbol{j}'+m_3\boldsymbol{k}')\\ &\quad+a_z(n_1\boldsymbol{i}'+n_2\boldsymbol{j}'+n_3\boldsymbol{k}')\\ &=(a_xl_1+a_ym_1+a_zn_1)\boldsymbol{i}'+(a_xl_2+a_ym_2+a_zn_2)\boldsymbol{j}'\\ &\quad+(a_xl_3+a_ym_3+a_zn_3)\boldsymbol{k}'\end{aligned}$$

与式（64）对比，得

$$a_{x'}=a_xl_1+a_ym_1+a_zn_1$$
$$a_{y'}=a_xl_2+a_ym_2+a_zn_2 \qquad (65)$$
$$a_{z'}=a_xl_3+a_ym_3+a_zn_3$$

或写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad (65')$$

式（65）或（65′），就是在坐标系进行旋转变换时向量分量的变换公式。

根据式（54）和（63）知，方向余弦的行列式代表单位立方体的体积，即

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=1\neq 0 \qquad (66)$$

所以由式（65）可以反解出a_x，a_y，a_z，用矩阵表为

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{bmatrix} \qquad (67)$$

引用

$$[\lambda]=\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

$$\{a\}=\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}$$

$$\{a'\}=\begin{Bmatrix} a_x' \\ a_y' \\ a_z' \end{Bmatrix}$$

则有

$$\{a'\}=[\lambda]\{a\} \tag{65''}$$

及

$$\{a\}=[\lambda^T]\{a'\} \tag{67'}$$

显然

$$[\lambda^T]=[\lambda^{-1}]$$

亦即变换矩阵$[\lambda]$是正交矩阵，所以在上述的坐标旋转变换中向量的变换是线性正交变换。

第三节　向　量　分　析

一、向量的微分和积分

1．向量的导数

设$\boldsymbol{v}(t)$是依赖于单变量t的函数，其中变量t是个标量。对于t的每个值都存在一个相应的向量$\boldsymbol{v}$。当自变量从t变到$t+\Delta t$时，$\boldsymbol{v}$的增量（图附—17）为

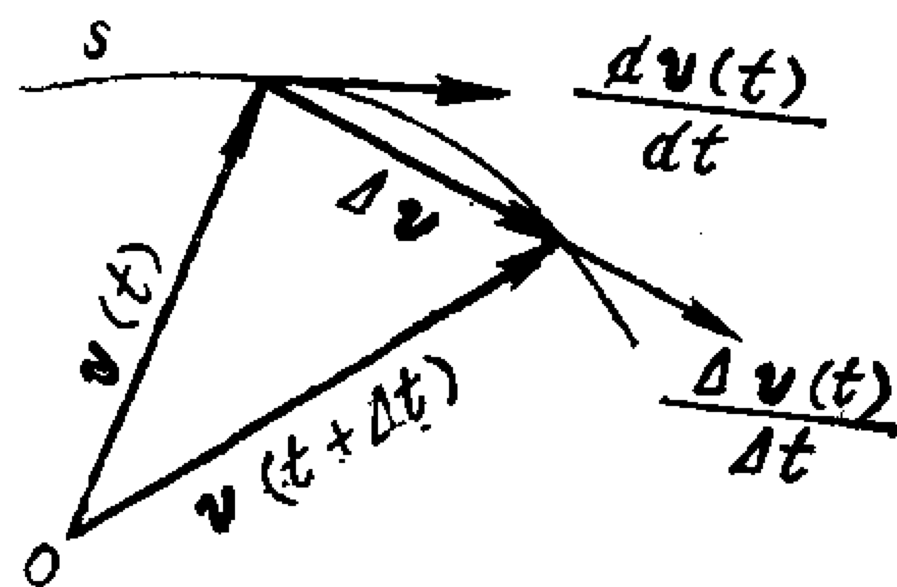


图　附—17

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$$

如果存在极限

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \tag{68}$$

则称为向量$\boldsymbol{v}(t)$对于标量t的导数。

图附—17上的曲线s是当t变化时$\boldsymbol{v}$的矢端曲线。增量$\Delta\boldsymbol{v}$ $\left(或\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}\right)$显然是个向量，它的方向是矢端曲线的割线方向，当$\Delta t\to 0$时，向量$\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$的方向是矢端曲线的切线方向，指向$t$增加

的一方。

如$\boldsymbol{v}$表为

$$\boldsymbol{v}(t)=v_x(t)\boldsymbol{i}+v_y(t)\boldsymbol{j}+v_z(t)\boldsymbol{k} \qquad (a)$$

则向量的导数还可以表为

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k} \qquad (69)$$

例如，质点的位置是时间 t 的函数，即

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \qquad (b)$$

则速度向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}\\&=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \qquad (c)$$

加速度向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \qquad (d)$$

2. 向量的微分法则

（1） $$\frac{d(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \qquad (70)$$

（2） $$\frac{d(m\boldsymbol{a})}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\quad (m\text{为常数}) \qquad (71)$$

（3） $$\frac{d(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{dt}=\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\boldsymbol{b}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \qquad (72)$$

（4） $$\frac{d(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{dt}=\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b} \qquad (73)$$

（5） $$\frac{d(\varphi\boldsymbol{a})}{dt}=\varphi\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{a}\quad (\varphi=\varphi(t)) \qquad (74)$$

上面这些公式的证明与普通微积分中相应公式的证明完全一样。例如式（73）可以证明如下：

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\Delta t}=\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right)$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\boldsymbol{b}\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\Delta\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right)$$

$$=\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}+0\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

关于向量的偏导数的规则与普通微积分类似。例如，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y)$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(x,y)$，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\cdot\boldsymbol{b} \tag{e}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\right\}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\cdot\boldsymbol{b}\right\}=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{b}}{\partial y\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}\cdot\boldsymbol{b} \tag{f}$$

3. 向量的积分

设一向量$\boldsymbol{v}(t)$是标量 t 的函数，如果存在向量$\boldsymbol{u}(t)$使得

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{v} \tag{75}$$

则$\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{c}$称为$\boldsymbol{v}(t)$的不定积分，记为

$$\int\boldsymbol{v}(t)dt=\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{c} \tag{76}$$

式中$\boldsymbol{c}$是常向量，若向量$\boldsymbol{v}(t)$用基向量表为

$$\boldsymbol{v}(t)=v_x(t)\boldsymbol{i}+v_y(t)\boldsymbol{j}+v_z(t)\boldsymbol{k} \tag{g}$$

则有

$$\int\boldsymbol{v}(t)dt=\boldsymbol{i}\int v_x(t)dt+\boldsymbol{j}\int v_y(t)dt+\boldsymbol{k}\int v_z(t)dt \tag{77}$$

定积分的形式是

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}(t)dt = \boldsymbol{u}(t_2) - \boldsymbol{u}(t_1) \tag{78}$$

定积分可以定义为向量和的极限

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{v}(t_k)(t_{k+1} - t_k) \tag{79}$$

其中t_k在t_2与t_1之间，$n\to\infty$时，所有的差$t_{k+1}-t_k$趋于零。

普通积分计算的某些关系式在这里仍然可用。例如，分部积分公式

$$\int \boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}dt = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \int\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}dt \tag{80}$$

等等。

4． 线积分

一个向量$\boldsymbol{f}(x,y,z)$沿一曲线c从点P_1到P_2的线积分I_l，定义为$\boldsymbol{f}$在曲线的切向分量的定积分，即

$$I_l = \int_{p_1}^{p_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{81}$$

式中，$d\boldsymbol{r}$是c上点位置向量的微分。（图附—18）。若位置向量$\boldsymbol{r}$和向量$\boldsymbol{f}$分别表为

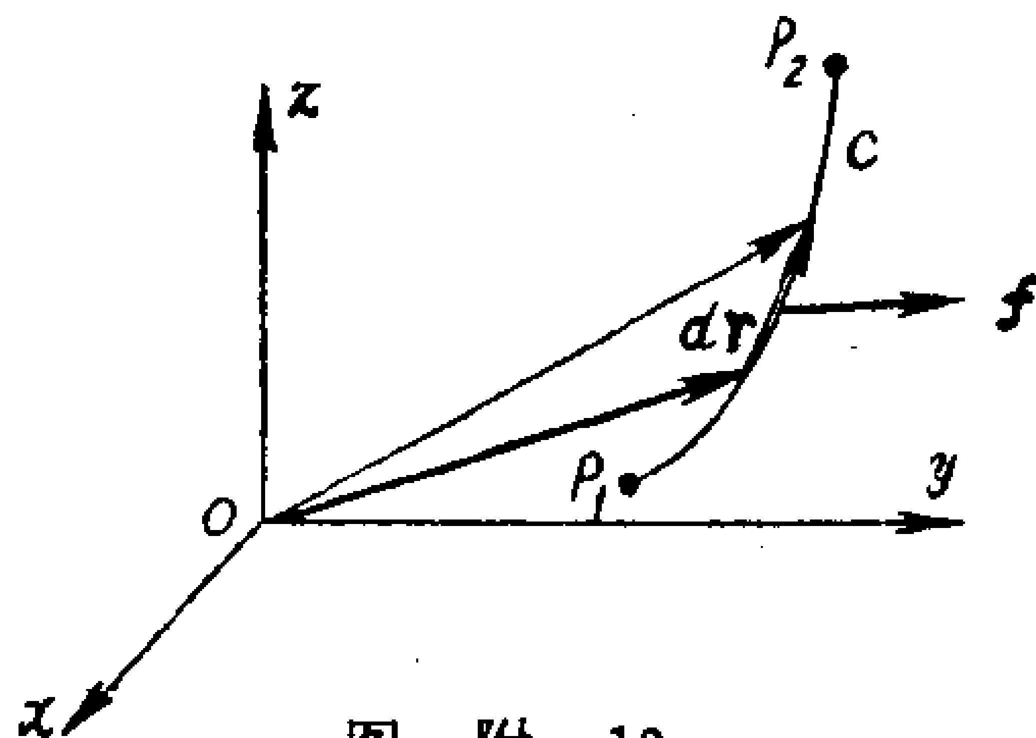


图 附—18

$$\boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{h}$$

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k} \tag{i}$$

则式（81）可写为分量形式

$$I_l = \int_c \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_c f_x dx + f_y dy + f_z dz \tag{81'}$$

如c是闭围线，则记为

$$I_c = \oint_c \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_c f_x dx + f_y dy + f_z dz \tag{82}$$

并称为向量$\boldsymbol{f}$关于c的环量。

5． 面积分

设S是一双侧曲面。任选一侧作为正向（若S是闭曲面取向

外指向为正）。取正向一侧上任一点的单位向量为$\boldsymbol{n}$。如图附—19。

设向量$d\boldsymbol{s}$的模为曲面面积微分ds；方向与$\boldsymbol{n}$一致，即微元面积（简称面元）向量

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}ds \tag{j}$$

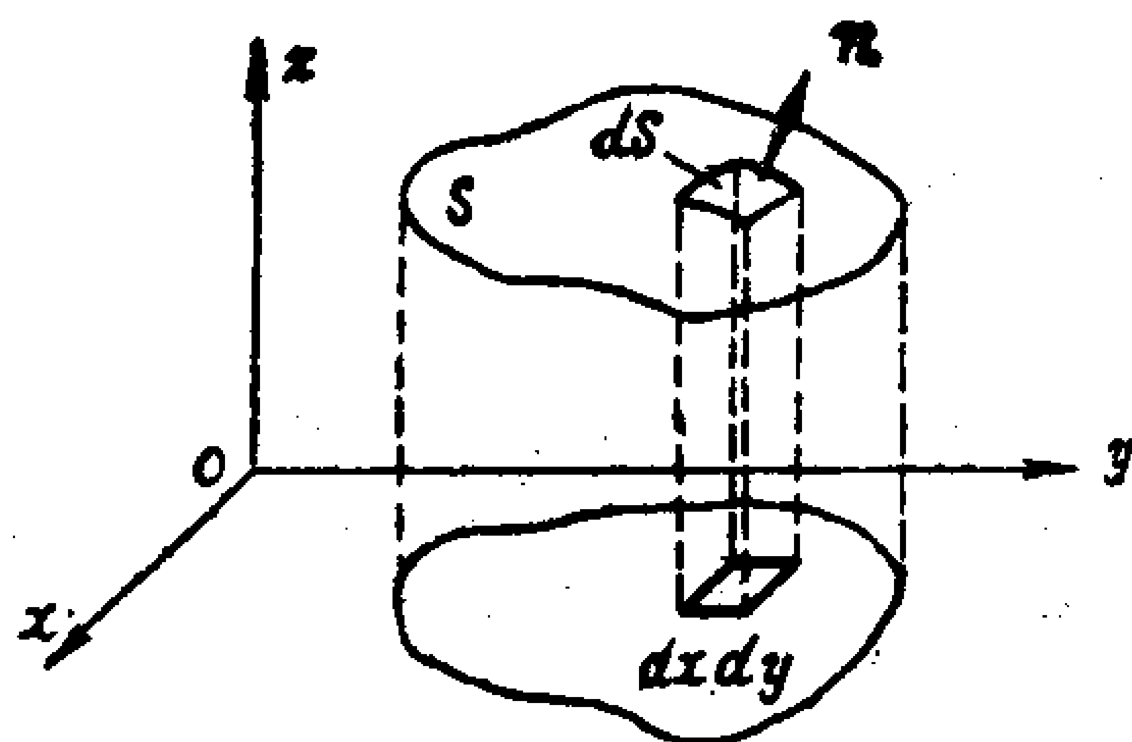


图 附—19

而$\boldsymbol{a}$是任一向量，则积分

$$I_s=\iint_s \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_s \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}ds \tag{83}$$

是一种形式的面积分，即向量$\boldsymbol{a}$在曲面法线方向的分量的面积分，称为向量$\boldsymbol{a}$在曲面S上的通量。式(83)也可以写为分量形式，这时

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{h}$$

$$\boldsymbol{n}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k} \tag{l}$$

于是有

$$I_s=\iint_s \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iint_s a_x lds+a_y mds+a_z nds \tag{83'}$$

如果曲面s是封闭的，积分号用$\oiint_s$或$\oint_s$，后者在不致与线积分混淆时用。同样$\iint_s$也可用$\int_s$。

还可以定义其它形式的面积分，如$\iint_s \varphi\boldsymbol{n}ds$，$\iint_s \boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{s}$等等。

6. 体积分

向量a的体积分表为$I_V=\iiint_V adV$，与普通积分一样定义。在不能引起混淆处$\iiint_V$也可用$\int_V$代替。

二、梯度、散度和旋度

1．标量场的梯度

设标量函数$\phi(x, y, z)$在空间某区域有定义且可微，即ϕ是一个可微标量场。而$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$是位置向量。定义

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

为标量场ϕ的梯度，记为grad ϕ。于是

$$\text{grad}\ \phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{84}$$

若引用向量微分算子∇（读作“纳勃拉”(nabla)），它定义为

$$\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\equiv\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{85}$$

亦称为梯度算子或哈密顿(Hamilton)算子。这时，梯度可以写为

$$\text{grad}\ \phi=\nabla\phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\phi \tag{84'}$$

为了了解梯度的物理意义，我们求ϕ的全微分，并注意到

$$d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k} \tag{86}$$

则有

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz=\nabla\phi\cdot d\boldsymbol{r} \tag{87}$$

若$|\boldsymbol{r}|=r$，两边对r求导数，得

$$\frac{d\phi}{dr}=\nabla\phi\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dr} \tag{88}$$

上式右边恰好是梯度$\nabla\phi$在$d\boldsymbol{r}$方向的分量，因此，梯度向量$\nabla\phi$在任一方向$d\boldsymbol{r}$的分量是ϕ对r的导数，称为方向导数。或者说标量函数ϕ在某个方向的方向导数就等于ϕ的梯度向量$\nabla\phi$在该方向的分量。显然，若$\nabla\phi$与$d\boldsymbol{r}$平行，$d\phi$取得最大值；若$\nabla\phi$与$d\boldsymbol{r}$垂直则$d\phi$为零。

2．向量场的散度

设向量函数$\boldsymbol{v}(x,y,z)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$在空间某区域有定义且可微，即$\boldsymbol{v}$是一个可微向量场。定义$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$为向量场$\boldsymbol{v}$的散度，记为div $\boldsymbol{v}$。于是

$$\text{div}\,\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{89}$$

因为散度定义为向量∇与向量$\boldsymbol{v}$的点积，所以得到的是标量场。

通过下面的例题可以了解散度的物理意义。

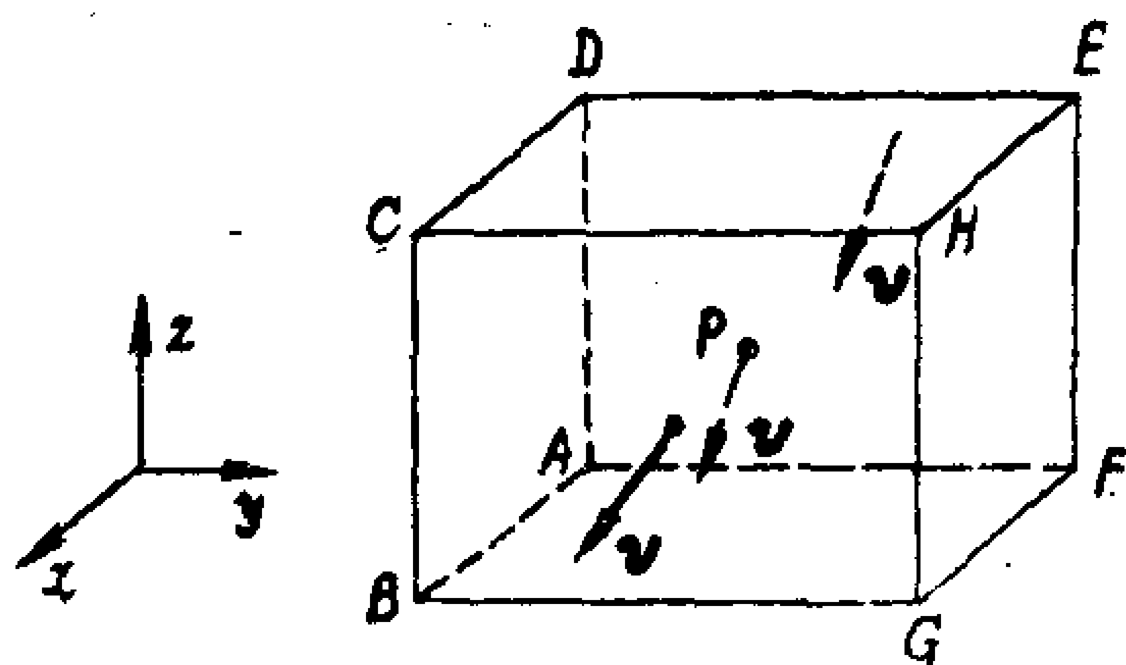


图 附—20

设流体在任一点的流速是$\boldsymbol{v}(x,y,z)$，试求单位时间内流过包围某点$P(x,y,z)$的单位体积的液体是多少？

包围P点作一微元平行六面体，如图附—20，P位于中心。

P点处速度$\boldsymbol{v}$在x方向的分量$=v_x$

$AFED$中心速度$\boldsymbol{v}$在x方向的分量$=v_x-\frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x$

$GHCB$中心速度$\boldsymbol{v}$在x方向的分量$=v_x+\frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x$

单位时间通过$AFED$的流体体积

$$=\left(v_x-\frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z$$

单位时间通过$GHCB$的流体体积

$$=\left(v_x+\frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z$$

在x方向单位时间从微元体流出的流体体积$=$

$$\left(v_x+\frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z-\left(v_x-\frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z$$

$$=\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

同理，在y方向和z方向单位时间从微元体流出的流体体积分别为$\frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$及$\frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$。于是，单位时间在单位空间体

积内流出流体体积的总量为

$$\frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{v} \quad (m)$$

上面的式子仅当平行六面体缩向P点，使Δx，Δy，Δz趋于零时，才是精确等式。

所以散度表示单位时间单位体积所流出流体的体积。

对于不可压缩流体，$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$意味着流入的等于流出的，里面没有源和沟，表示流体连续不断的流过，因此称为不可压缩流体的连续性方程式。散度为零的向量场，例如$\boldsymbol{v}$称为管量场（无源场）。

3．向量场的旋度

设$\boldsymbol{v}$是一个可微向量场，定义$\nabla\times\boldsymbol{v}$为向量$\boldsymbol{v}$的旋度，记为rot $\boldsymbol{v}$或cunl $\boldsymbol{v}$。于是

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \quad (90)$$

因为旋度定义为向量∇与向量$\boldsymbol{v}$的叉积，所以得到的仍然是向量场。

通过下面的例题可以了解到旋度的物理意义。

设转动液体的线速度为$\boldsymbol{v}$，它与旋转角速度向量$\boldsymbol{\omega}$的关系可表为$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，试求向量$\boldsymbol{v}$的旋度。

根据旋度的定义和叉积的运算规则，有

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\nabla\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times[(\omega_y z-\omega_z y)\boldsymbol{i}+(\omega_z x-\omega_x z)\boldsymbol{j}+(\omega_x y-\omega_y x)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \omega_y z-\omega_z y & \omega_z x-\omega_x z & \omega_x y-\omega_y x\end{vmatrix}$$

$$=2(\omega_x \boldsymbol{i}+\omega_y \boldsymbol{j}+\omega_z \boldsymbol{k})=2\boldsymbol{\omega}$$

于是
$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\text{rot }\boldsymbol{v} \qquad (n)$$

这一结果指出，向量场的旋度，与场的转动性质有关。rot $\boldsymbol{v}=0$ 的向量场$\boldsymbol{v}$称为无旋场（有势场）。

4. 常用的包含∇算子的关系式

(1) $\nabla(\phi+\psi)=\nabla\phi+\nabla\psi$，即grad $(\phi+\psi)$
$=\text{grad }\phi+\text{grad }\psi$ (91)

(2) $\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi$，即grad $(\phi\psi)=\phi\text{ grad }\psi$
$+\psi\text{ grad }\phi$ (92)

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$，即div $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$
$=\text{div }\boldsymbol{a}+\text{div }\boldsymbol{b}$ (93)

(4) $\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b}$，即rot$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$
$=\text{rot }\boldsymbol{a}+\text{rot }\boldsymbol{b}$ (94)

(5) $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{a})=(\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{a}+\phi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$ (95)

(6) $\nabla\times(\phi\boldsymbol{a})=(\nabla\phi)\times\boldsymbol{a}+\phi(\nabla\times\boldsymbol{a})$ (96)

(7) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$ (97)

(8) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$
$+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})$ (98)

(9) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$
$+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$ (99)

(10) $\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ (100)

式中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$就是通常的拉普拉斯 (Laplace) 算子。

(11) $\nabla\times(\nabla\phi)=0$，即$\phi$的梯度的旋度为零。 (101)

(12) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$，即$\boldsymbol{a}$的旋度的散度为零。 (102)

(13) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}$ (103)

(14) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$ (104)

(15) $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$ (105)

以上各式可以根据定义直接证明，式中的ϕ，ψ是标量函数，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是向量函数，而$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。

三、几个重要的积分定理

1. 高斯(Gauss)散度定理

设V是由任意闭合曲面S所围的体积，$\boldsymbol{v}$是在域上有连续导数的向量函数。这时，高斯散度定理叙述为：向量函数$\boldsymbol{v}$的法向分量沿闭合曲面S的面积分，等于$\boldsymbol{v}$的散度(div$\boldsymbol{v}$)在S所围体积V上的体积分。即

$$\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}=\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}dV \qquad (106)$$

式中$\boldsymbol{n}$是S的正（向外）单位法向量。在不引起混淆时，也可用$\int_V(\quad)dV$代替$\iiint_V(\quad)dV$，用$\oint_S$代替$\oiint_S$。

下面证明散度定理。由图附—21，S是一闭合曲面，设任何平行于坐标轴的直线与S最多有二交点（多于两交点的曲面可以分割为满足此条件的子域，分别证明再加起来即可）。用平行于z轴的柱面将S分为S_1和S_2两部分，对应的曲面方程分别为$z=f_1(x,y)$和$z=f_2(x,y)$，它们在oxy坐标面上的投影用R表示。考虑体积分

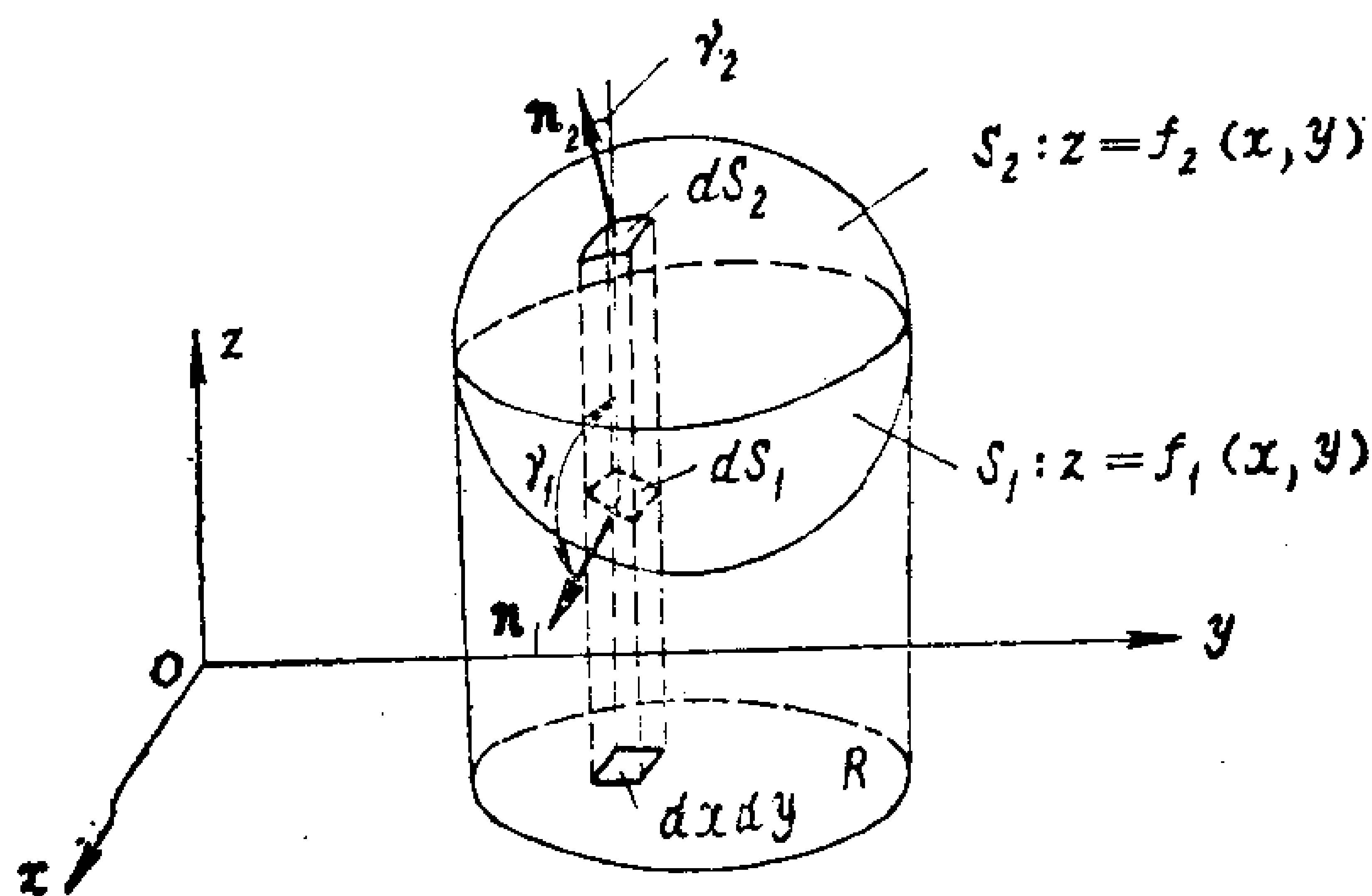


图 附—21

$$\iiint_V \frac{\partial v_z}{\partial z} dV = \iiint_V \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dy dx$$

$$= \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right] dx dy$$

$$= \iint_R v_z(x, y, z) \Big|_{z=f_1}^{z=f_2} dx dy = \iint_R \Big[v_z(x, y, f_2)$$

$$- v_z(x, y, f_1) \Big] dx dy$$

对于上部分S_2，法向量$\boldsymbol{n}_2$与$\boldsymbol{k}$交成锐角，所以$dxdy = \cos\gamma_2 ds_2 = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_2 ds_2$；对于下部分$S_1$，$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{k}$交成钝角，$dxdy = -\cos\gamma_1 dS_1 = -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_1 dS_1$。故有

$$\iint_R v_z(x, y, f_2) dx dy = \iint_{S_2} v_z \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_2 dS_2,$$

$$\iint v_z(x, y, f_1) dx dy = -\iint_{S_1} v_z \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_1 dS_1$$

及

$$\iint_R v_z(x, y, f_2) dx dy - \iint_R v_z(x, y, f_1) dx dy$$

$$= \iint_{S_2} v_z \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_2 dS_2 + \iint_{S_1} v_z \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_1 dS_1$$

$$= \oiint_S v_z \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

因此

$$\iiint_V \frac{\partial v_z}{\partial z} dV = \oiint_S v_z \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

同样，若把S投影到其它两个坐标面上，有

$$\iiint_V \frac{\partial v_x}{\partial x} dV = \oiint_S v_x \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_y}{\partial y} dV = \oiint_S v_y \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

将最后三式相加，得

$$\iiint_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dV = \oiint_S (v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{n}ds$$

即

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}dV = \oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS \text{（证毕）}$$

如果把向量$\boldsymbol{v}$作为运动流体的速度，散度定理的物理意义就十分明确。由式(m)，$\iiint\nabla\cdot\boldsymbol{v}dV$表示每秒钟从$S$里所有体积元素流出流体的总体积，而$\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS$表示每秒钟从闭合曲面$S$流出流体的总体积。

2．格林(Green)定理

利用散度定理可以推出物理、力学中非常有用的两个定理：

$$\oiint_S (\psi\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V [\psi\nabla^2\phi+(\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)]dV$$

（格林第一定理）　(107)

$$\oiint_S (\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V [\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi]dV$$

（格林第二定理）　(108)

式中ϕ，ψ是位置坐标的函数，定义在由闭合曲面所包围的某个区域上，具有所需要的连续偏导数。现证明如下：

在散度定理中，置$\boldsymbol{v}=\psi\nabla\phi$，则

$$\oiint_S (\psi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}dS = \oiint_S (\psi\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot(\psi\nabla\phi)dV$$

但　$\nabla\cdot(\psi\nabla\phi)=\psi(\nabla\cdot\nabla\phi)+(\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)=\psi\nabla^2\phi+(\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)$

故有

$$\oiint_S (\psi\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V [\psi\nabla^2\phi+(\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)]dV$$

这就证明了格林第一定理。在上式中交换ϕ，ψ可得

$$\oiint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V [\phi\nabla^2\psi+(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)]dV$$

从前式减该式即得格林第二定理。

如果注意到

$$\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial\phi}{\partial n},\ \nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial\psi}{\partial n} \tag{109}$$

式（107），（108）还可以写为

$$\oiint_s \psi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds=\iiint_V[\psi\nabla^2\phi+(\nabla\psi)\cdot(\nabla\psi)]dV \tag{107'}$$

及

$$\oiint_S\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=\iiint_V[\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi]dV \tag{108'}$$

3. 斯托克斯（Stokes）旋度定理

设C是一简单闭合曲线（不交叉），S是以C为界的非闭合曲面，$\boldsymbol{v}$具有连续的一阶导数。这时，斯托克斯定理叙述为：向量函数$\boldsymbol{v}$的切向分量沿一简单闭合曲线C的线积分，等于$\boldsymbol{v}$的旋度$(\text{rot}\boldsymbol{v})$的法向分量在以$C$为边界的任何曲面$S$上所作的面积分。

即
$$\oint_C\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}ds=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{s} \tag{110}$$

式中，围线积分沿C取正向。曲线C的正向是这样规定的：当观察者沿边界行进时，如头的指向与曲面正法线方向一致，则曲面S总在他左侧时为正。现证明如下：

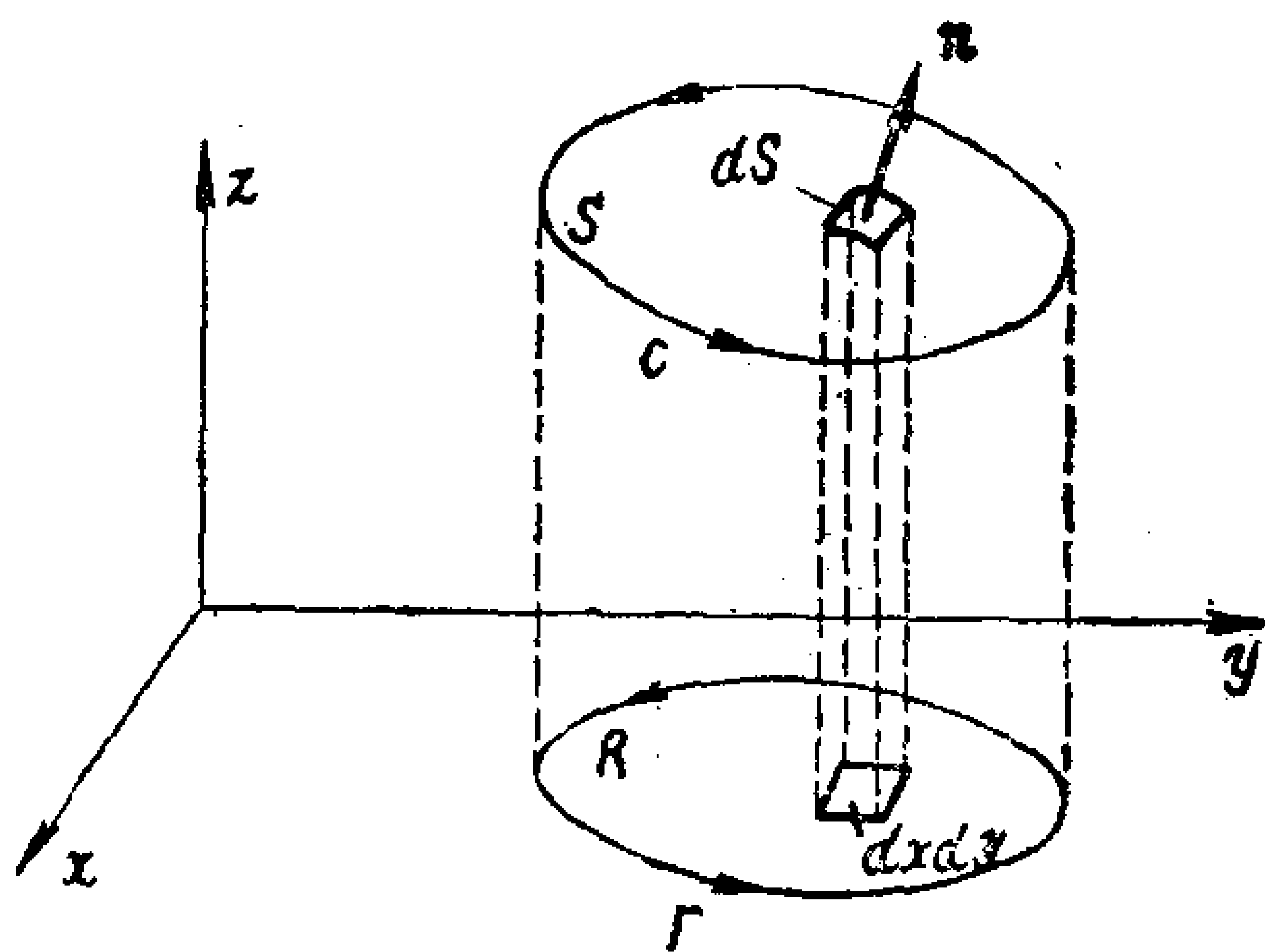


图 附—22

假设S在各坐标平面上的投影是由简单闭合曲线围成的区域（若不满足这一条件，可将S分为若干个满足条件的区域，分别证明后相加），R是S在oxy平面上的投影，Γ是R的边界线，正方向与C相同，如图附—22。假定S有表达式$z=f(x,y)$或$x=g(y,z)$或$y=h(x,z)$。

首先将式（110）中的面积分展开：

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} ds = \iint_S [\nabla \times (v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k})] \cdot \boldsymbol{n} ds$$

上式右端第一个积分可以化为

$$\iint_S [\nabla \times (v_x \boldsymbol{i})] \cdot \boldsymbol{n} ds = \iint_S \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{n} ds$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} \right) ds$$

注意到

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} ds = dx dy$$

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} ds = -dx dz$$

最后式的负号是因为：z 是 x 和 y 的函数，当$dy > 0$ 时，若$dz > 0$，$\boldsymbol{n}$在 y 方向的向量分量与$\boldsymbol{j}$相反。

于是

$$\iint_S [\nabla \times (v_x \boldsymbol{i})] \cdot \boldsymbol{n} ds = -\iint_R \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) dx$$

$$= -\int \left[\int \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) \right] dx$$

式中，圆括号内的项，当保持 x 时，$dz = \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$，因而，

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = d v_x,$$

所以上式变为

$$\iint_S \left[\nabla \times (v_x \boldsymbol{i}) \right] \cdot \boldsymbol{n} ds = -\int dx \int d v_x$$

对于等式右边的积分，注意到$z = f(x, y)$，在沿平面曲线Γ正向进行时$dx > 0$（当$y = y_2$时）及$dx < 0$（当$y = y_1$时），于是有

$$-\int dx \int d v_x = -\int \Big[v_x(x, y_2, f(x, y_2)) - v_x(x, y_1, f(x, y_1)) \Big] dx = \oint_\Gamma v_x(x, y) dx$$

因为在Γ上每点(x,y)处v_x的值与在C上点(x,y,z)处的值相同，而且这两条曲线dx也相同，故有

$$\oint_{\Gamma} v_x(x,y)dx=\oint_C v_x(x,y,z)dx$$

或

$$\iint_S\left[\nabla\times(v_x\boldsymbol{i})\right]\cdot\boldsymbol{n}ds=\oint_C v_x(x,y,z)dx$$

同理，将曲面投影到其它坐标面上，有

$$\iint_S\left[\nabla\times(v_y\boldsymbol{j})\right]\cdot\boldsymbol{n}ds=\oint_C v_y(x,y,z)dy$$

$$\iint_S\left[\nabla\times(v_z\boldsymbol{k})\right]\cdot\boldsymbol{n}ds=\oint_C v_z(x,y,z)dz$$

相加上面三式，得

$$\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}ds=\oint_C\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$$

4. 平面格林定理

设R是oxy平面上由一简单封合曲线所围的区域，$M(x,y)$和$N(x,y)$在R上连续且存在连续导数。这时，平面格林定理表示为

$$\oint_C(Mdx+Ndy)=\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy \qquad (111)$$

式中，围线积分$\oint_C$沿C的正向完成，C以逆时针走向为正。现证明如下：

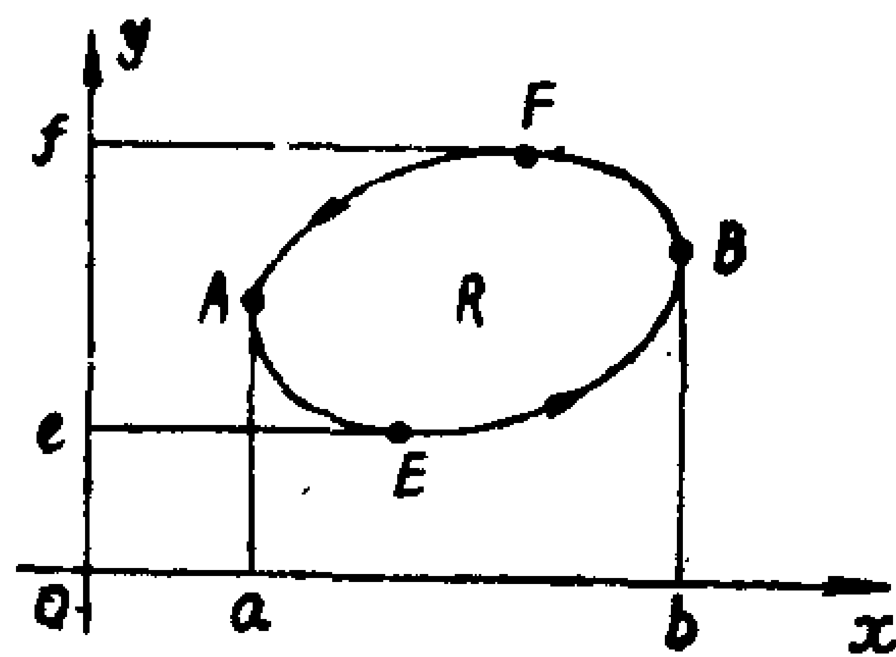


图 附—23

由图附—23，假设任何平行于坐标轴的直线与闭合曲线C至多有两个交点。

令曲线AEB的方程为$y=y_1(x)$，AFB的方程为$y=y_2(x)$，考虑积分

$$\iint_R\frac{\partial M}{\partial y}dxdy=\int_{x=a}^{x=b}\left[\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\frac{\partial M}{\partial y}dy\right]dx$$

$$=\int_{x=a}^{x=b} M(x,\ y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx$$

$$=\int_a^b \Big[M(x,y_2)-M(x,y_1)\Big]dx$$

$$=-\int_a^b M(x,y_1)dx-\int_b^a M(x,y_2)dx$$

$$=-\oint_C Mdx$$

于是

$$\oint_C Mdx=-\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}dxdy$$

类似地推导，得

$$\oint_C Ndy=\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}dxdy$$

相加上面二式即得所证。

对于平行于坐标轴的直线与C有多于两个交点的情形，平面格林定理仍然成立，证明时可将R分为若干个子域，使每个子域都符合所要求的条件，分别证明然后相加即可。

利用向量，式（111）可以表示为两种形式，即

$$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_R (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{k}dR \tag{112}$$

及

$$\oint_C \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iint_R \nabla\cdot\boldsymbol{b}dR\ \ (\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}) \tag{113}$$

上面二式中的$dR=dxdy$，ds是弧长的微分。

置$\boldsymbol{a}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，代入式（112）即得到式（111）。

如设$\boldsymbol{t}$是沿曲线C的单位切向向量，$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}$，则$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}ds$置$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}$代入式（113）即得到式（111）。

实际上，平面格林定理是斯托克斯定理的特殊情形。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝力学中的张量计算
作者＝曹富新
页数＝２４０
ＳＳ号＝１０２１７１９４
出版日期＝１９８５年０１月第１版

前言
目录

第一章　笛卡尔张量
　第一节　指标表示法
　第二节　坐标变换
　第三节　笛卡尔张量
　第四节　张量的运算
　第五节　二阶张量
　第六节　张量的主轴、主值和不变量
第二章　普遍张量的基本概念
　第一节　普遍张量的记法
　第二节　基向量、向量的逆变分量和协变分量
　第三节　坐标变换
　第四节　张量的普遍定义
第三章　几个基本的或常用的张量
　第一节　度量张量
　第二节　置换张量
　第三节　一阶张量——向量
　第四节　二阶张量
第四章　张量代数
　第一节　张量的基本运算
　第二节　可乘张量。对称张量和反对称张量
　第三节　二阶张量的特征值和不变量
　第四节　仿射变换。物体的刚性转动
　第五节　张量分量和物理分量
第五章　张量分析
　第一节　克里斯托夫符号及其性质。短程线
　第二节　协变导数
　第三节　平行移动
　第四节　内蕴导数与实质导数
　第五节　黎曼—克里斯托夫张量
　第六节　张量场。梯度、散度和旋度。积分定理
第六章　张量的某些应用
　第一节　曲线坐标
　第二节　弹性力学基本方程的张量方程
　第三节　曲面
附录　向量计算的基本知识
　第一节　基本概念
　第二节　向量代数
　第三节　向量分析